

Cours de Licence 3: Géométrie Différentielle

Cours de: Laurent Bessières

Rédigé par Hugo Clouet*

Année universitaire 2023 - 2024

Version: 9 novembre 2025

Table des matières

1	Courbes, théorie locale	5
1.1	Courbes dans $\mathbf{R}^n$, généralités	5
1.1.1	Arcs paramétrés, arcs géométriques	5
1.1.2	Points réguliers, tangente, plan osculateur	6
1.1.3	Longueur	7
1.1.4	Courbure	10
1.1.5	Cercle osculateur	11
1.1.6	Invariance par isométries de la longueur et de la courbure	12
1.2	Courbes dans $\mathbf{R}^2$	13
1.2.1	Courbure algébrique	13
1.2.2	La courbure algébrique détermine la courbe	14
1.2.3	Formules	14
1.3	Courbes dans $\mathbf{R}^3$, dites courbes gauches	15
1.3.1	Trièdre de Frenet, torsion	15
1.3.2	Courbure et torsion déterminent la courbe	16
1.3.3	Formules	17
2	Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$	19
2.1	Introduction	19
2.2	Immersion, submersion	20
2.3	Caractérisations d'une sous-variété	23
2.4	Exemples	26
2.5	Espace tangent	26
2.6	Extrêmes liés	28
3	Étude métrique locale des surfaces de $\mathbf{R}^3$	29
3.1	Première forme fondamentale	29
3.1.1	Rappels sur les produits scalaires	29
3.1.2	Première forme fondamentale, expression locale	29
3.1.3	Longueur, distance intrinsèque, angles	31
3.1.4	Aires	32
3.2	Courbures	34
3.2.1	Application de Gauss	34
3.2.2	Endomorphisme de Weingarten, seconde forme fondamentale	35
3.2.3	Expression en coordonnées locales	38
3.3	Géodésiques	39
3.3.1	Existence et unicité locale	39
3.3.2	L'application exponentielle $X \mapsto c_X(1)$ et les coordonnées géodésiques	40
3.4	Le « Theorema Egregium »	42

*email: hugo.clouet@etu.u-bordeaux.fr

4	Formes différentielles	45
4.1	Préliminaires algébriques	45
4.1.1	Tenseurs	45
4.1.2	Tenseurs alternés	46
4.2	Formes différentielles	50
4.3	Différentielle extérieure	50
4.4	Le lemme de Poincaré	52
4.5	Effet d'applications lisses	53
4.6	1-formes et intégrales	54

Rappels de calcul différentiel

Soient $f: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ une application avec U un ouvert et $a \in U$.

Différentielle : L'application f est *différentiable* en a s'il existe $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ linéaire vérifiant pour tout $u \in \mathbf{R}^n$ voisin de 0 :

$$f(a+u) = f(a) + L(u) + \|u\|\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|\varepsilon(u)\| = 0$$

où $\varepsilon: U \rightarrow \mathbf{R}^p$. On note $\|u\|\varepsilon(u) = o(u)$. Le choix des normes est indifférent puisqu'elles sont équivalentes en dimension finie. La *différentielle* L est unique mais on trouve dans la littérature les diverses notations suivantes :

$$L = d_a f = df_a = D_a(f) = Df(a) = f'(a).$$

On pourra écrire $d_a f(u) = d_a f \cdot u$.

Règle de dérivation des fonctions composées : Si f est différentiable en a et $g: V \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q.$$

Dérivées partielles : Si f est différentiable en a , elle admet en particulier des *dérivées partielles* définies pour $i \in \{1, \dots, n\}$ par

$$\partial_i f(a) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + te_i) = d_a f(e_i).$$

La dernière égalité résultant de la règle de dérivation des composées.

Gradient, matrice Jacobienne : Si f est une application différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ici, $p = 1$), on appelle *gradient* de f le vecteur

$$\nabla_a f = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

formé des dérivées partielles. On a

$$d_a f(u) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) u_i = \langle \nabla_a f, u \rangle.$$

L'application $f = (f_1, \dots, f_p)$ est différentiable si les f_i le sont et on appelle *matrice jacobienne* de f la matrice $p \times n$:

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_a f_1 \\ \vdots \\ \nabla_a f_p \end{pmatrix}.$$

On a l'égalité matricielle $d_a f(u) = J_a f \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. La matrice $J_a f$ est la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $d_a f$.

Application de classe $\mathcal{C}^k$, difféomorphismes : Si toutes les dérivées partielles $\partial_i f_j$ existent au voisinage de a et sont continues en a , alors f est différentiable en a . On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si les $\partial_i f_j$ existent et sont continues sur U . Cela équivaut à ce que $a \mapsto d_a f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p) \approx \mathbf{R}^{np}$ existe et soit continu. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Une application $f: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow V \subset \mathbf{R}^p$ entre ouverts est un *difféomorphisme* de classe $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et admet une réciproque $f^{-1}: V \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^k$. Nécessairement, $p = n$ car $d_a f$ et $d_{f(a)} f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre vu que $\text{Id} = d_a(f^{-1} \circ f) = d_{f(a)} f^{-1} \circ d_a f$.

Théorème 0.0.0.1 (INVERSION LOCALE). Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$, de différentielle $d_a f$ inversible en un point $a \in U$, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a tel que $f(V)$ soit ouvert et que $f: V \rightarrow f(V)$ soit un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

1 Courbes, théorie locale

On travaille dans $\mathbf{R}^n$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ associés.

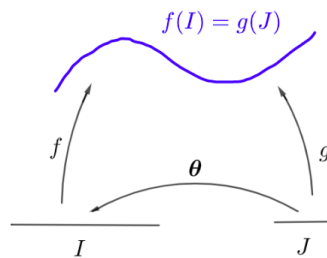
1.1 Courbes dans $\mathbf{R}^n$, généralités

1.1.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques

Définition 1.1.1.1 (ARC PARAMÉTRÉ). Un *arc paramétré* de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbf{N}_{>0}$ est un couple (I, f) où $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$.

Sauf mention contraire, dans la suite, on supposera $k \geq 1$.

Définition 1.1.1.2 (ARC GÉOMÉTRIQUE). Deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) de classe $\mathcal{C}^k$ sont $\mathcal{C}^k$ -équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme $\theta: J \rightarrow I$ tel que $g = f \circ \theta$. Un *arc géométrique* est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés. Le sous-ensemble $f(I) = g(J) \subset \mathbf{R}^n$ est le *support* de l'arc géométrique



C'est une relation d'équivalence : • Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$. Il est clair que $(I, f) \sim (I, f)$ en prenant $\theta = \text{Id}$ qui est bien un difféomorphisme lisse, donc $\sim$ est réflexive.

• Soit (J, g) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$. Si $(I, f) \sim (J, g)$, alors il existe $\theta: J \rightarrow I$ un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme tel que $g = f \circ \theta$. Il est clair que $\theta^{-1}: I \rightarrow J$ est aussi un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme et que $f = g \circ \theta^{-1}$, donc $(J, g) \sim (I, f)$ et la relation est symétrique.

• Soit (K, h) un autre arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$. Si $(I, f) \sim (J, g)$ et $(J, g) \sim (K, h)$, alors il existe $\theta: J \rightarrow I$ tel que $g = f \circ \theta$ et il existe $\varphi: K \rightarrow J$ tel que $h = g \circ \varphi = (f \circ \theta) \circ \varphi = f \circ (\theta \circ \varphi)$ et $\theta \circ \varphi: K \rightarrow I$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme, donc $(I, f) \sim (K, h)$ et la relation est transitive.

Le difféomorphisme θ est un *reparamétrage*.

Exemple 1.1.1.3. On voit que $f(t) = (t, 0)$ sur $] -1, 1[$ et $g(s) = (2s, 0)$ sur $] -1/2, 1/2[$ paramètrent le même arc géométrique (en posant $\theta:] -1/2, 1/2[\rightarrow] -1, 1[; x \mapsto 2x$ un difféomorphisme lisse).

Remarque 1.1.1.4. (1) L'application θ' est continue et ne s'annule pas (puisque θ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme avec $k \geq 1$), donc $\theta' > 0$ ou $\theta' < 0$ sur J . Les arcs (I, f) et (J, g) sont *positivement équivalents* si $\theta' > 0$. Une classe d'arcs paramétrés positivement équivalents est un *arc géométrique orienté*. Un arc géométrique contient exactement 2 arcs géométriques orientés.

Exemple : $h(t) = f(-t)$ sur $] -1, 1[$ est équivalent à f mais pas positivement.

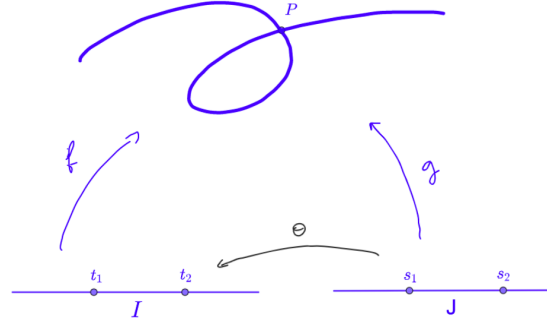
(2) L'arc géométrique détermine le support mais la réciproque est fausse.

Exemple : Pour $k \in \mathbf{N}$ et $k \geq 3$, soit $t \in]0, k\pi[$ tel que $f_k(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et A_k l'arc géométrique classe de $(]0, k\pi[, f_k)$. Le support des A_k est $f_k([0, k\pi]) = \mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ mais $A_k \neq A_\ell$ si $k \neq \ell$ puisque de longueurs $k\pi \neq \ell\pi$, or la longueur est invariante par reparamétrage (cf. remarque 1.1.3.2 (2)).

Autre argument : le cardinal de la pré-image d'un point $\#(f^{-1}(p)) = \#\{t \in I; f(t) = p\} \in \mathbf{N} \cup +\infty$ est invariant par reparamétrage i.e. $\#(f^{-1}(p)) = \#(g^{-1}(p))$ si f et g sont équivalents.

Définition 1.1.1.5 (POINT D'UN ARC GÉOMÉTRIQUE). Un *point d'un arc géométrique* A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) , où (I, f) paramètre A et $t \in I$. La relation d'équivalence est : $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un reparamétrage $\theta: J \rightarrow I$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$. L'élément commun $f(t) = g(s) \in \mathbf{R}^n$ est l'*image* du point.

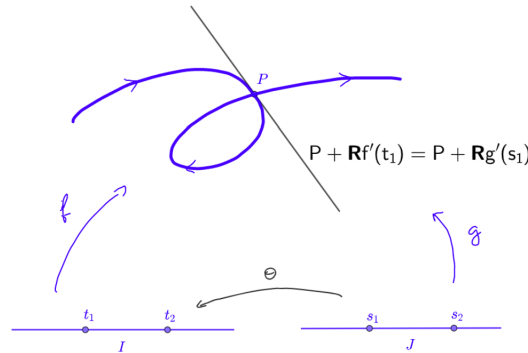
La notation (I, f, t) étant un peu lourde, on pourra dire simplement soit $p = f(t)$ un point de A , en pensant à p comme la classe de (I, f, t) . Sur le dessin ci-dessous, $p_1 = f(t_1)$ et $p_1 = g(s_1)$ sont égaux mais différents de $p_2 = f(t_2)$. Néanmoins, tous ont pour image P . La distinction des points est utile car la tangente (voir section d'après) en p_1 n'est pas celle en p_2 .



1.1.2 Points réguliers, tangente, plan osculateur

Soit A un arc géométrique paramétré par (I, f) .

Définition 1.1.2.1 (POINT RÉGULIER, TANGENTE). Un point $p = f(t)$ de A est *régulier* si $f'(t) \neq 0$. La droite affine $f(t) + \mathbf{R}f'(t)$ est alors la *tangente* à A en p . L'arc géométrique A est régulier si tous ses points le sont.



La définition est licite *i.e.* la condition $f'(t) \neq 0$ et la tangente sont invariantes par reparamétrage. En effet, soit (J, g) un paramétrage de A tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$, alors

$$g'(s) = (f \circ \theta)'(s) = f'(\theta(s))\theta'(s) = f'(t)\theta'(s)$$

et puisque $\theta' \neq 0$, on a $g'(s) \neq 0 \Leftrightarrow f'(t) \neq 0$. De plus, $\mathbf{R}g'(s) = \mathbf{R}f'(t)$, donc $g(s) + \mathbf{R}g'(s) = f(t) + \mathbf{R}f'(t)$.

Exemple 1.1.2.2. Soit A dans $\mathbf{R}^2$ un arc géométrique paramétré par $t \in]-1, 1[$ tel que $f(t) = (t, 0)$ et B paramétré par $t \in]-1, 1[$ tel que $g(t) = (t^3, 0)$. Ces arcs géométriques ont même support mais sont différents : A est régulier car $f'(t) = (1, 0) \neq 0$ et B n'est pas régulier en $p = h(0)$ car $h'(0) = 0$.

Définition 1.1.2.3 (POINT BIRÉGULIER, PLAN OSCULATEUR). Soit A un arc géométrique régulier paramétré par (I, f) et soit $p = f(t)$ un point de A .

- (i) Le point p est *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants, sinon p est un *point d'inflexion*.
- (ii) Si p est birégulier, le plan vectoriel $\text{Vect}(f'(t), f''(t))$ est le *plan osculateur* à A au point p et le plan affine $f(t) + \text{Vect}(f'(t), f''(t))$ est le *plan osculateur affine*.
- (iii) L'arc géométrique A est *birégulier* si tous ses points le sont.

La définition est licite, *i.e.* ne dépend pas du paramétrage. En effet, soit (J, g) un autre paramétrage de A et $\theta: J \rightarrow I$ le reparamétrage. En dérivant $g = f \circ \theta$, on trouve

$$\begin{pmatrix} g' \\ g'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(\theta)\theta' \\ f''(\theta)\theta'^2 + f'(\theta)\theta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ \theta'' & \theta'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(\theta) \\ f''(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

La matrice est inversible car $\theta'(s) \neq 0$, donc $\text{Vect}(g'(s), g''(s)) = \text{Vect}(f'(t), f''(t))$ en $g(s) = f(t)$ où $t = \theta(s)$.

Exemple 1.1.2.4. Sur $\mathbf{R}$, soit $f(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ dans $\mathbf{R}^3$. On a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ et $f''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$. Ils sont non nuls et orthogonaux ($\langle f', f'' \rangle = 0$) donc indépendants. Le plan osculateur est $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ et le plan osculateur affine est $\mathbf{R}^2 \times \{1\}$.

Dans cet exemple, la courbe est contenue dans un plan affine, ce qui implique la constance du plan osculateur. La réciproque est vraie.

Lemme 1.1.2.5 (ARC PLANAIRE $\Leftrightarrow$ PLAN OSCULATEUR CONSTANT). Si A est un arc géométrique de $\mathbf{R}^n$ dont le plan osculateur est constant égal à un plan $V \subset \mathbf{R}^n$, alors A est contenu dans un plan affine parallèle à V .

Démonstration. Soit $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-2}$ une application linéaire de noyau V , par exemple : $\phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = (x_1, \dots, x_{n-2})$ où $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de $\mathbf{R}^n$ telle que $V = \text{Vect}\{v_{n-1}, v_n\}$. Soit (I, f) un paramétrage de A . Puisque ϕ est linéaire, sa différentielle $d_a \phi$ en $a \in \mathbf{R}^n$ est constante égale à ϕ . Par conséquent, $(\phi(f(t)))' = d_{f(t)} \phi \cdot f'(t) = \phi(f'(t)) = 0$ puisque $f'(t) \in V = \text{Ker}(\phi)$. Ainsi, $t \mapsto \phi(f(t))$ est constante. Fixons $t_0 \in I$. Pour tout $t \in I$, on a alors $0 = \phi(f(t)) - \phi(f(t_0)) = \phi(f(t) - f(t_0))$, donc $f(t) - f(t_0) \in V$, d'où $f(t) \in f(t_0) + V$. $\square$

1.1.3 Longueur

Définition 1.1.3.1 (LONGUEUR). Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ continue et soit $[a, b] \subset I$. Étant donnée $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, on définit

$$\ell_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{N-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{N-1} \|f(t_i) - f(t_{i+1})\|.$$

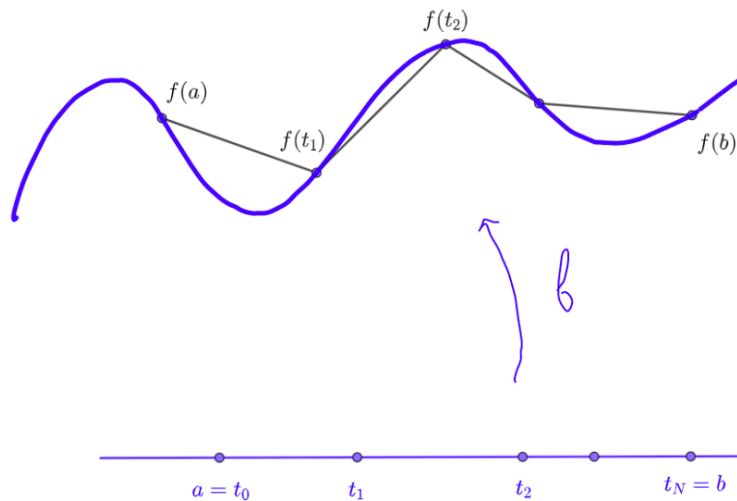
On dit que f est *rectifiable* sur $[a, b]$ si

$$\ell(f|_{[a,b]}) := \sup_{\sigma} \ell_\sigma(f) < +\infty.$$

L'arc paramétré (I, f) est *rectifiable* si f est rectifiable sur tout $[a, b] \subset I$ et sa *longueur* est alors

$$\ell(f) := \sup_{[a,b] \subset I} \ell(f|_{[a,b]}) \in [0, +\infty].$$

Un arc géométrique A paramétré par (I, f) est rectifiable si f l'est et sa longueur est $\ell(A) := \ell(f)$.



Remarque 1.1.3.2. (1) La quantité $\sup_{\sigma} \ell_\sigma(f)$ peut être infinie pour f continue. Un exemple est la *courbe de Koch* pour laquelle elle est infinie pour tout $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ (voir l'exercice 16 de la feuille 1).



(2) La longueur est invariante par reparamétrage continu. En effet, l'image réciproque d'une subdivision σ par un homéomorphisme croissant θ est encore une subdivision, donc $\ell_\sigma(f) = \ell_{\theta^{-1}(\sigma)}(f \circ \theta)$. Si on inverse l'orientation de f en considérant $h(t) := f(a + b - t)$, on a $\ell_{\sigma'}(h) = \ell_\sigma(f)$ en posant $\sigma' = \{a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_N = b\}$ où $t'_i = a + b - t_{N-i}$ (on peut vérifier l'égalité en exercice). La longueur de A est donc bien définie.

(3) Le segment $t \in [0, 1] \mapsto c(t) = p + t(q - p)$ est de longueur $d(p, q)$ et est le plus court chemin entre p et q . En effet, l'inégalité triangulaire montre que $d(p, q) \leq \ell(f|_{[a,b]})$ pour toute fonction f joignant $p = f(a)$ à $q = f(b)$ et on calcule que $\ell_\sigma(c) = d(p, q)$ pour toute subdivision, d'où $\ell(c) = d(p, q)$ (exercice).

(4) La longueur dépend de l'arc géométrique et pas seulement du support : une courbe parcourue en Aller-Retour a une longueur double de la courbe Aller.

Exercice 1.1.3.3. Soit $f(t) = (t, t \sin(1/t))$ défini sur $]0, 1[$. Montrer que $\ell(f) = +\infty$ (Indication : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$).

Théorème 1.1.3.4 (LES ARCS $\mathcal{C}^1$ SONT RECTIFIABLES). Si A est un arc géométrique $\mathcal{C}^1$, paramétré par (I, f) , alors f est rectifiable et pour tout $[a, b] \subset I$,

$$\ell(f|_{[a,b]}) = \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad (1.2)$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.3.5. On a

$$\left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad (1.3)$$

Démonstration. Par définition de l'intégrale de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ de $[a, b]$ de pas $t_{i+1} - t_i < \delta$, on a

$$\left\| \int_a^b f'(t) dt - \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\| \leq \varepsilon \quad (1.4)$$

et

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{i=0}^{N-1} \|f'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) \right| \leq \varepsilon. \quad (1.5)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| &= \left\| \int_a^b f'(t) dt - \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\| \\ &\leq \left\| \int_a^b f'(t) dt - \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\| + \sum_{i=0}^{N-1} \|f'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \varepsilon + \int_a^b \|f'(t)\| dt + \varepsilon \end{aligned}$$

avec (1.4) et (1.5), d'où (1.3) en faisant tendre ε vers 0. $\square$

Démonstration du théorème 1.1.3.4. La quantité de droite de (1.2) est finie par continuité de $\|f'\|$ et compacité de $[a, b]$. Montrons d'abord l'inégalité $\ell(f|_{[a,b]}) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$ qui prouvera la rectifiabilité de f sur $[a, b]$. Soit $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $i \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$d(f(t_i), f(t_{i+1})) = \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt$$

d'après le lemme 1.1.3.5. En sommant de 0 à $N-1$,

$$\ell_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{N-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

donne l'inégalité voulue en prenant le sup sur les subdivisions σ de $[a, b]$. L'inégalité réciproque est plus délicate. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\ell(f|_{[a,b]}) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a). \quad (1.6)$$

Observons que si $f'(t)$ est constante sur $[t_i, t_{i+1}]$, alors on a

$$\begin{aligned} d(f(t_i), f(t_{i+1})) &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) dt \right\| = \|f'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| \\ &= \|f'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt. \end{aligned}$$

On se rapproche de cette situation en découpant $[a, b]$ en petits intervalles sur lesquels $f'(t)$ est presque constante. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f' est continue, elle est uniformément continue sur le compact $[a, b]$ par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$(\forall s, t \in [a, b]) \quad |t - s| < \delta \Rightarrow \|f'(t) - f'(s)\| < \varepsilon.$$

On prend une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $t_{i+1} - t_i < \delta$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) - f'(t_i) dt \right\| \quad (\text{en écrivant } X = Y + X - Y) \\ &\geq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) dt \right\| - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) - f'(t_i) dt \right\| \quad (\text{avec } \|X + Y\| \geq \|X\| - \|Y\|) \\ &\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\| dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \quad (\text{avec le lemme 1.1.3.5}) \\ &\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\| - \|f'(t)\| dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\| dt \\ &\quad (\text{encore avec } X = Y + X - Y \text{ dans l'intégrale de gauche}) \\ &\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i) - f'(t)\| dt \quad (\text{avec } \|X\| - \|Y\| \geq -\|X - Y\|) \\ &\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt - 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

par choix de δ et de σ . Ainsi,

$$\|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt - 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i)$$

et on obtient l'inégalité $\ell_\sigma(f) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt - 2\varepsilon(b - a)$ en sommant sur i , d'où (1.6). $\square$

Tout arc géométrique régulier admet un paramétrage privilégié, celui à vitesse constante 1, pour lequel beaucoup de quantités géométriques auront des expressions plus simples :

Proposition-Définition 1.1.3.6 (PARAMÉTRAGE PAR LONGUEUR D'ARC). Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ un arc géométrique régulier $\mathcal{C}^1$. Il existe un paramétrage (J, g) de A , dit *paramétrage par longueur d'arc*, tel que

$$(\forall s \in J) \quad \|g'(s)\| = 1$$

ou de manière équivalente,

$$(\forall [a, b] \subset J) \quad \ell(g|_{[a, b]}) = b - a.$$

Démonstration. Soit (I, f) une paramétrisation de A . Soit $a \in I$, posons $s: I \rightarrow \mathbf{R}$ tel que

$$s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du.$$

L'application s est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$. Par le théorème de la bijection¹, cela implique que s est un difféomorphisme. On définit $J = s(I)$ et $\theta: J \rightarrow I$ comme la réciproque de s , alors $g = f \circ \theta$ vérifie avec $t = \theta(u)$,

$$\|g'(u)\| = \|f'(\theta(u))\theta'(u)\| = \left\| f'(t) \frac{1}{s'(t)} \right\| = \frac{\|f'(t)\|}{\|f'(t)\|} = 1$$

en utilisant la règle de dérivation de la fonction réciproque. $\square$

Remarque 1.1.3.7. (1) Si f et g sont deux paramétrages par longueur d'arc tel que $g = f \circ \theta$, alors $\theta(t) = \pm t + C$, car $1 = \|g'\| = \|f'(\theta)\theta'\| = \|f'(\theta)\| \cdot |\theta'| = 1 \cdot |\theta'|$ donc $|\theta'| = 1$ et en intégrant en t on a notre résultat.

(2) Si $\|g'\| = 1$ sur J , alors g' est orthogonal à g'' . En dérivant l'égalité $\langle g'(s), g'(s) \rangle = 1$, on obtient $\langle g''(s), g'(s) \rangle + \langle g'(s), g''(s) \rangle = 2\langle g'(s), g''(s) \rangle = 0$. On a donc :

1. Si s est continue et strictement monotone sur I , alors s établit une bijection de l'intervalle I sur $s(I) = J$. En particulier, la fonction réciproque $s^{-1}: J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que s .

A est birégulier en $g(s) \Leftrightarrow g'(s), g''(s) \neq 0$.

Exercice 1.1.3.8 (CERCLE DE RAYON R). Soit $P \in \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^n$ un plan affine contenant P . Soit $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ une base orthonormée du plan vectoriel $\vec{V}$. Montrer que

$$g(s) = P + R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{u} + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{v}$$

est un paramétrage par longueur d'arc du cercle de rayon R de centre P contenu dans V .

1.1.4 Courbure

Définition 1.1.4.1 (COURBURE). Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ un arc géométrique régulier, (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = g(s)$ un point de A . On appelle *courbure* de A en p le réel

$$K_A(p) = \|g''(s)\|.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $K_A(p) = K(p)$. La définition est licite. En effet, soit (I, f) un autre paramétrage de A par longueur d'arc tel que $g = f \circ \theta$. La formule (1.1) valable pour $g = f \circ \theta$ quelconques donne avec $t = \theta(s)$:

$$g''(s) = f''(t)\theta'(s)^2 + f'(t)\theta''(s). \quad (1.7)$$

Cependant, $\theta' = \pm 1$, donc $\theta'^2 = 1$ et $\theta'' = 0$, d'où $g''(s) = f''(t)$.

Exemple 1.1.4.2. Pour un cercle de rayon R , la courbure est $1/R$.

Le paramétrage par longueur d'arc peut-être délicat à calculer, donc il est utile d'avoir une formule de la courbure pour un paramétrage quelconque. Soit (I, f) un tel paramétrage, (J, g) un paramétrage par longueur d'arc tel que $g = f \circ \theta$. Il suffit d'exprimer $\theta'(s)$ et $\theta''(s)$ en fonction de t dans la formule (1.7). On a donc

$$1 = \|g'(s)\| = \|f'(t)\theta'(s)\| = \|f'(t)\| \cdot |\theta'(s)|$$

d'où

$$\theta'(s)^2 = \frac{1}{\|f'(t)\|^2} = \frac{1}{\langle f'(t), f'(t) \rangle}.$$

En dérivant on obtient

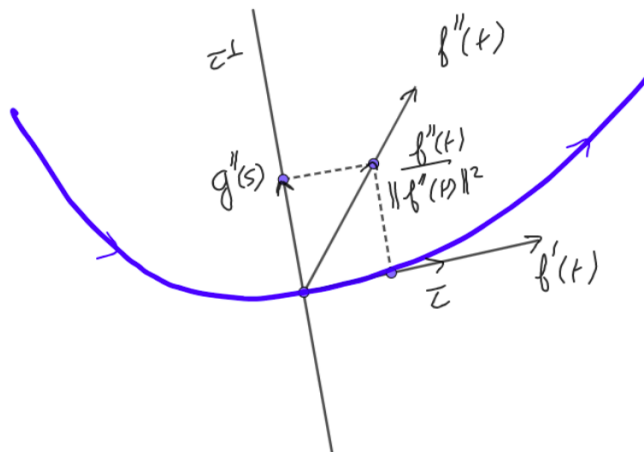
$$2\theta'\theta'' = -2 \frac{\langle f'(t), f''(t)\theta' \rangle}{\langle f'(t), f'(t) \rangle^2}$$

d'où

$$\theta'' = - \frac{\langle f'(t), f''(t) \rangle}{\langle f'(t), f'(t) \rangle^2}.$$

En posant, $\tau = \frac{f''(t)}{\|f'(t)\|}$ on obtient au point $p = g(s) = f(t)$:

$$g''(s) = \frac{f''}{\|f'\|^2} - \left\langle \frac{f''}{\|f'\|^2}, \tau \right\rangle \tau. \quad (1.8)$$



On commente la formule (1.8) : elle dit que $g''(s)$ est le projeté orthogonal de $\frac{f''}{\|f'\|^2}$ sur $\tau^\perp$. En appliquant le théorème de Pythagore, on en déduit :

$$K(p)^2 = \|g''(s)\|^2 = \left(\frac{\|f''(t)\|}{\|f'(t)\|^2} \right)^2 - \left(\frac{\langle f''(t), f'(t) \rangle}{\|f'(t)\|^3} \right)^2.$$

Interprétation cinématique : On peut reformuler (1.8) comme suit. Supposons la courbure non nulle et posons $\nu = \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|} \perp \tau$, alors

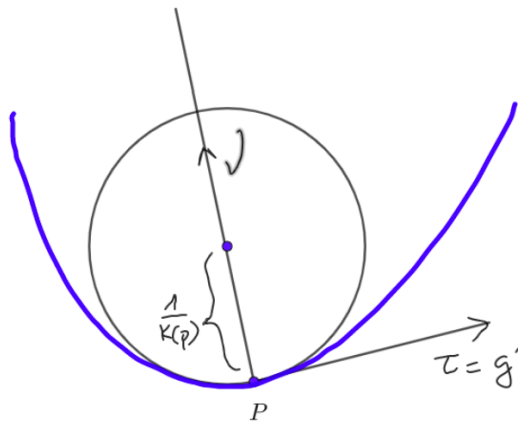
$$f''(t) = \langle f'', \tau \rangle \tau + \|f'(t)\|^2 K(p) \nu. \quad (1.9)$$

On voit que l'accélération $f''(t)$ a une composante tangentielle *i.e.* $\langle f'', \tau \rangle \tau$ et une composante centrifuge *i.e.* $\|f'(t)\|^2 K(p) \nu$. Imaginons qu'en voiture, nous accélérions dans un virage. La force ressentie est pour partie dirigée vers notre siège (due à la pression sur l'accélérateur) et pour partie vers l'extérieur du virage (composante centrifuge). La courbure n'intervient que dans cette dernière, c'est l'accélération centrifuge divisée par le carré de la vitesse.

1.1.5 Cercle osculateur

Soit A un arc géométrique régulier paramétré par longueur d'arc par (J, g) et soit $p = g(s) \in A$ tel que $K(p) \neq 0$. On note $\tau = g'(s)$ et $\nu = \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|}$. On rappelle que le plan osculateur affine à A en $p = g(s)$ est $g(s) + \text{Vect}(g', g'')$.

Définition 1.1.5.1 (CERCLE OSCULATEUR). Le *cercle osculateur* à A en p est le cercle, contenu dans le plan osculateur affine, de centre $g(s) + \frac{1}{K(p)} \nu$ et de rayon $\frac{1}{K(p)}$.



C'est le cercle du plan osculateur affine qui a même tangente et courbure que A en p . Il est situé du même côté de la tangente de l'arc. Il approxime l'arc à l'ordre 2, dans le sens suivant.

Proposition 1.1.5.2 (APPROXIMATION PAR LE CERCLE OSCULATEUR). Soit $(\tilde{K}, h)$ un paramétrage par longueur d'arc du cercle osculateur à A en p . On peut supposer que $h(0) = p = g(0)$ et $h'(0) = \tau$. On a alors

$$g(s) = h(s) + o(s^2).$$

Démonstration. Dans le plan osculateur muni du repère (p, τ, ν) , le paramétrage par longueur d'arc d'un cercle de rayon R centré en $(0, R)$ (avec position $(0, 0)$ au temps 0) est

$$s \mapsto (0, R) + R(\sin(s/R), -\cos(s/R))$$

(en faisant subir une rotation de $-\pi/2$ à la formule habituelle). On a $h'(s) = (\cos(s/R), \sin(s/R))$ et $h''(s) = \frac{1}{R}(-\sin(s/R), \cos(s/R))$, d'où en faisant le développement limité en $s = 0$, on obtient $h(s) = (0, 0) + s(1, 0) + \frac{s^2}{2}(0, \frac{1}{R}) + o(s^2)$, soit

$$h(s) = h(0) + s\tau(0) + \frac{s^2}{2} \frac{1}{R} \nu(0) + o(s^2)$$

Par ailleurs, le développement limité de $g(s)$ en 0 à l'ordre 2 donne

$$g(s) = g(0) + sg'(0) + \frac{s^2}{2} g''(0) + o(s^2) = h(0) + s\tau(0) + \frac{s^2}{2} K(p) \nu(0) + o(s^2)$$

et comme le rayon du cercle osculateur est $R = \frac{1}{K(p)}$, on a bien $g(s) = h(s) + o(s^2)$. $\square$

1.1.6 Invariance par isométries de la longueur et de la courbure

Définition 1.1.6.1 (ISOMÉTRIES). Une application $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une *isométrie* si

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}^n) \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

et *orthogonale* si

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}^n) \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On rappelle un résultat du cours de Géométrie affine et/ou Algèbre bilinéaire et géométrie. Pour la commodité du lecteur, une preuve est donnée plus bas.

Théorème 1.1.6.2 (ISOMÉTRIES DE $\mathbf{R}^n$). Une isométrie de $\mathbf{R}^n$ est la composée d'une application orthogonale et d'une translation, *i.e.* est de la forme $x \mapsto Mx + v$ où $M \in O_n(\mathbf{R})$ et $v \in \mathbf{R}^n$. En particulier, elle est de classe C^∞ .

Proposition 1.1.6.3 (INVARIANCE DE LONGUEUR ET COURBURE PAR ISOMÉTRIE). Soient A un arc géométrique de $\mathbf{R}^n$ et f une isométrie de $\mathbf{R}^n$.

- (i) L'application f respecte les paramétrages par longueur d'arc et $\ell(A) = \ell(f(A))$.
- (ii) La courbure de A en $p \in A$ est égale à la courbure de $f(A)$ en $f(p)$.

Démonstration. D'après le théorème 1.1.6.2, $f(x) = Mx + v$ pour $M \in O_n(\mathbf{R})$ et $v \in \mathbf{R}^n$, donc la différentielle $d_x f$ de f est représentée par la matrice M orthogonale. Soit (J, g) un paramétrage par longueur d'arc de A .

- (i) Pour tout $s \in J$,

$$\|(f \circ g)'(s)\| = \|d_{g(s)} f \cdot g'(s)\| = \|Mg'(s)\| = \|g'(s)\| = 1$$

donc $(J, f \circ g)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $f(A)$. Ainsi, on obtient l'égalité des longueurs avec la longueur de J .

- (ii) Soit $p = g(s)$, alors $f(p) = f \circ g(s)$ et

$$K_{f(A)}(f(p)) = \|(f \circ g)''(s)\| = \|(Mg'(s))'\| = \|M \cdot g''(s)\| = \|g''(s)\| = K_A(p).$$

□

Lemme 1.1.6.4. Une isométrie fixant 0 est orthogonale. En particulier, elle est linéaire.

Démonstration. Soit f une isométrie de $\mathbf{R}^n$ fixant 0. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| = d(f(x), f(y)) = d(x, y) = \|x - y\|$$

et en particulier $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x\|$. Après développement des produits scalaires dans l'égalité,

$$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$$

et simplification des normes égales il reste $-2\langle f(x), f(y) \rangle = -2\langle x, y \rangle$ d'où le résultat. □

Démonstration du théorème 1.1.6.2. • Montrons d'abord qu'une application orthogonale est linéaire. En développant le produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x+y), f(x+y) \rangle + \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &\quad - 2\langle f(x+y), f(x) \rangle - 2\langle f(x+y), f(y) \rangle + 2\langle f(x), f(y) \rangle \\ &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x+y, x \rangle - 2\langle x+y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle \\ &= \|x+y-x-y\|^2 = 0 \end{aligned}$$

prouvant que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et on montre de même que $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$.

• Les matrices représentant les endomorphismes orthogonaux forment le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R}) := \{M \in M_n(\mathbf{R}); {}^tMM = I_n\}$ puisque

$$\begin{aligned} M \in O_n(\mathbf{R}) &\Leftrightarrow {}^tMM = I_n \\ &\Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbf{R}^n) \quad \langle x, y \rangle = \langle x, {}^tMM y \rangle = \langle Mx, My \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto Mx$ est orthogonale. Elles sont des isométries, préservant la norme et la distance :

$$d(Mx, My)^2 = \|Mx - My\|^2 = \|M(x - y)\|^2 = \|x - y\|^2 = d(x, y)^2.$$

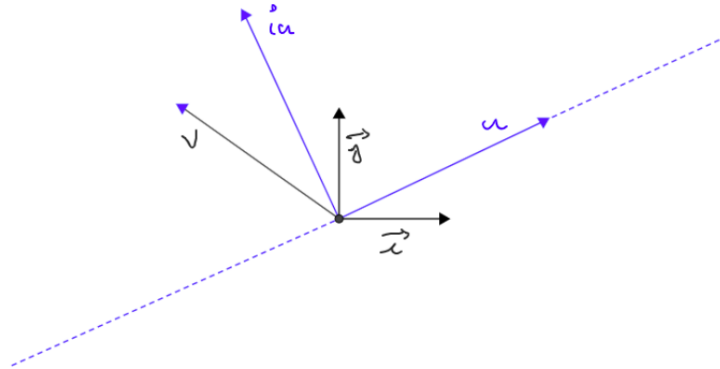
Soit f une isométrie de $\mathbf{R}^n$ et soit T la translation de vecteur $-f(0)$. On a alors que $L := T \circ f$ est une isométrie de $\mathbf{R}^n$ fixant 0, donc $L(x) = Mx$ pour $M \in O_n(\mathbf{R})$ d'après le lemme 1.1.6.4. Comme $f = T^{-1} \circ L$, le théorème est donc prouvé. □

1.2 Courbes dans $\mathbf{R}^2$

Dans $\mathbf{R}^2$, on sait tourner « à gauche » ou « à droite ». En effet, $\mathbf{R}^2$ est orienté par la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{j}$ est à gauche de $\vec{i}$. Le vecteur $v \in \mathbf{R}^2$ est alors à gauche de u si la base (u, v) est directe. Par définition donc, si $\det(u, v) > 0$, où on voit les coordonnées de (u, v) comme la matrice de passage vers la base canonique, la base est directe. En identifiant $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ via $(a, b) \mapsto a + ib$, la multiplication complexe par i est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour u unitaire, la base (u, iu) est orthonormée directe. La matrice de passage de (u, v) à (u, iu) est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \langle u, v \rangle \\ 0 & \langle iu, v \rangle \end{pmatrix}$$

donc $\det(Q) = \langle iu, v \rangle > 0$ si et seulement si v appartient au demi-espace $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}u$ contenant iu .



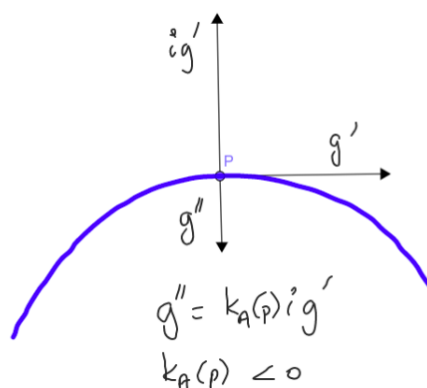
Ceci permet de donner un signe à la courbure d'un arc, selon qu'il tourne à gauche ou à droite.

1.2.1 Courbure algébrique

On définit la *courbure algébrique* à valeur dans $\mathbf{R}$ d'un arc régulier, strictement positive si g'' est à gauche de g' et strictement négative si g'' est à droite. Formellement :

Définition 1.2.1.1 (COURBURE ALGÈBRE). Soit A un arc géométrique orienté régulier paramétré par longueur d'arc par (J, g) . On appelle *courbure algébrique* en $p = g(s) \in A$ le réel

$$k_A(p) = k(s) = \langle g''(s), ig'(s) \rangle.$$



De manière équivalente, $k_A(p)$ est l'unique réel satisfaisant $g''(s) = k_A(p)ig'(s)$. En effet, $g'' \perp g'$, donc $g'' \in \mathbf{R}ig'$. On a évidemment $|k_A(p)| = K_A(p)$. En notant $(\tau, n) = (g', ig')$ la base orthonormée directe déterminée par g' , on a les relations

$$\tau' = kn \quad n' = -k\tau. \quad (1.10)$$

En effet, $n' = (i\tau)' = i\tau' = ikn = -k\tau$. On montre dans la proposition 1.2.1.3 ci-dessous que la courbure algébrique est la vitesse de rotation du vecteur tangent unitaire $\tau : k = \alpha'$ si α est l'angle de τ avec le vecteur $\vec{i}$. Comme l'angle n'est défini que modulo 2π , on va définir α à valeurs dans $\mathbf{R}$ par la formule $\tau = e^{i\alpha}$ et requérir qu'il soit lisse. L'existence de α suit de $\tau \in \mathbf{S}^1$ mais sa régularité demande une justification.

Lemme 1.2.1.2 (RELÈVEMENT DE L'ANGLE). Soit $\tau: J \rightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geq 1$ et soit $s_0 \in J$. Il existe un unique $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $\tau = e^{i\alpha}$ et $\alpha(s_0) \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. La fonction α doit satisfaire la relation $\tau' = i\alpha' e^{i\alpha} = i\alpha' \tau \in \mathbf{C}$, soit $\alpha' = -i \frac{\tau'}{\tau} \in \mathbf{C}$. Par ailleurs, en dérivant l'égalité $\langle \tau, \tau \rangle = 1$, on trouve $2\langle \tau', \tau \rangle = 0$, donc τ' est perpendiculaire à τ . Soit aussi $\tau' \in \mathbf{R} i\tau$, ou encore $-i \frac{\tau'}{\tau} \in \mathbf{R}$. On définit $\alpha(s_0) \in [0, 2\pi[$ tel que $\tau(s_0) = e^{i\alpha(s_0)}$ puis

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s -i \frac{\tau'}{\tau}(t) dt \in \mathbf{R}.$$

On vérifie immédiatement que α convient. □

Proposition 1.2.1.3 (LA COURBURE ALGÈBRIQUE EST LA VITESSE DE ROTATION DU VECTEUR UNITAIRE TANGENT). Soient (J, g) un paramétrage par longueur d'arc de classe $\mathcal{C}^p$ et $\alpha: J \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que $g' = e^{i\alpha}$. La courbure algébrique de g vérifie alors $k(s) = \alpha'(s)$ sur J .

Démonstration. On a directement $k = \langle g'', ig' \rangle = \langle i\alpha' g', ig' \rangle = \alpha'$. □

1.2.2 La courbure algébrique détermine la courbe

Imaginez que vous êtes enfermé dans le coffre d'une voiture roulant à vitesse constante. Pouvez-vous reconstituer le trajet à partir des accélérations ressenties ? OUI (théoriquement). Mathématiquement : La courbure algébrique détermine la courbe (à isométrie près : il faut connaître position et vitesse initiales).

Théorème 1.2.2.1 (LA COURBURE ALGÈBRIQUE DÉTERMINE LA COURBE). Soit $k: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$, avec $p \geq 0$. Il existe alors, à isométrie près, un unique arc géométrique orienté A de classe $\mathcal{C}^{p+2}$ dont k soit la courbure algébrique.

Démonstration. Soit $k: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geq 0$. Fixons un angle $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ et un point $p_0 \in \mathbf{R}^2$. Pour $s_0 \in I$, on pose $\alpha(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt$, puis on intègre le vecteur vitesse $\tau := e^{i\alpha}$:

$$g(s) = p_0 + \int_{s_0}^s e^{i\alpha(t)} dt.$$

Ainsi, $g' = e^{i\alpha}$ est alors paramétré par la longueur et $g'' = \alpha' e^{i\alpha} = k i g'$. L'unicité de la courbe telle que $g(s_0) = p_0$ et $g'(s_0) = e^{i\alpha_0}$ est claire puisque k et α_0 déterminent α , puis α et p_0 déterminent g . □

Remarque 1.2.2.2. Le théorème est faux avec la courbure.

Exemple 1.2.2.3. La *clothoïde* est la courbe de courbure algébrique $k(s) = as$ avec $a > 0$. On a $\alpha(s) = \frac{as^2}{2}$ d'où

$$g(s) = g(0) + \int_{s_0}^s (\cos(as^2), \sin(as^2)) ds.$$

C'est la trajectoire parcourue en voiture si on tourne le volant à vitesse constante. Elle est utilisée dans les constructions de routes ou de rails pour raccorder des droites et des arcs de cercle sans faire d'a-coup.

1.2.3 Formules

Paramétrage quelconque : Soit (I, f) un paramétrage régulier quelconque, on a $f'(t) = \|f'(t)\| \tau$ et au point $p = f(t)$ d'après (1.9), on a également

$$f''(t) = \langle f'', \tau \rangle \tau + \|f'(t)\|^2 K(p) \nu = \langle f'', \tau \rangle \tau + \|f'(t)\|^2 k(s) n.$$

Les coordonnées de (f', f'') , exprimées en colonne dans la base orthonormée directe (τ, n) , forment la matrice

$$\begin{pmatrix} \|f'\| & \langle f'', \tau \rangle \\ 0 & \|f'(t)\|^2 k(s) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est

$$\det(f', f'') = \|f'(t)\|^3 k(s).$$

Le déterminant de la matrice de coordonnées ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie car la matrice de passage entre deux bases orthonormées direct est de déterminant 1. En outre, si on écrit maintenant $f = (x, y)$, on a

$$k(p) = \frac{\det(f', f'')}{\|f'(t)\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^3}. \quad (1.11)$$

En coordonnées polaires : Soit $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par $f(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$, où $r(\theta) > 0$. On a alors

$$f' = r'e^{i\theta} + rie^{i\theta} \quad \text{et} \quad f'' = r''e^{i\theta} + 2r'ie^{i\theta} - re^{i\theta} = (r'' - r)e^{i\theta} + 2r'ie^{i\theta}.$$

Dans la base $(e^{i\theta}, ie^{i\theta})$, les coordonnées de (f', f'') forment la matrice $\begin{pmatrix} r' & r''-r \\ r & 2r' \end{pmatrix}$, d'où

$$k(\theta) = \frac{\det(f', f'')}{\|f'(t)\|^3} = \frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

1.3 Courbes dans $\mathbf{R}^3$, dites courbes gauches

On travaille maintenant dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, orienté par la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Il n'y a pas de notion bien définie d'être « à gauche » d'un vecteur unitaire u donné : pour tout vecteur unitaire $v \in u^\perp$, il existe une isométrie directe envoyant (u, v) sur $(\vec{i}, \vec{j})$, donc tout $u^\perp$ serait « à gauche » de u . Pourtant, il existe bien une notion de gauche et de droite que nous utilisons au quotidien : celle-ci tient du fait que nous avons deux axes naturels orientés, définis par la vision (axe derrière-devant) et la gravité (bas-haut). Mathématiquement : étant donné (u, v, w) orthonormée, il existe une unique isométrie directe envoyant (u, w) sur $(\vec{i}, \vec{k})$, le vecteur v étant envoyé sur $\pm \vec{j}$, ce qui permet de dire s'il est à gauche ou à droite de u . Revenons aux arcs géométriques orientés et considérons g un paramétrage par longueur d'arc. Il n'y a au départ qu'un axe orienté naturellement défini : celui défini par le vecteur vitesse g' . On peut orienter le plan osculateur par (g', g'') si $g'' \neq 0$. On pourra alors définir « le haut » et « le bas » par rapport au plan osculateur en se donnant un 3^{ème} vecteur β tel que (g', g'', β) soit directe. Pour cela nous *supposons A birégulier dans toute cette section*.

1.3.1 Trièdre de Frenet, torsion

Produit vectoriel : Faisons tout d'abord quelques rappels sur le produit vectoriel. C'est l'application bilinéaire antisymétrique $\wedge: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vérifiant $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$. Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

De manière équivalente, le produit vectoriel est caractérisé par l'égalité

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathbf{R}^3$. Le déterminant étant celui des coordonnées de X, Y, Z dans la base canonique. En particulier, $X \wedge Y$ est orthogonal à X et Y . On a l'égalité

$$\|X \wedge Y\|^2 + \langle X, Y \rangle^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2.$$

Si e_1, e_2 sont des vecteurs orthonormés, $e_3 = e_1 \wedge e_2$ est tel que (e_1, e_2, e_3) est orthonormée directe. Soit (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc.

Définition 1.3.1.1 (TRIÈDRE DE FRENET). Le *trièdre de Frenet* de A est la base orthonormée directe (τ, ν, β) définie le long de A par

$$\tau = g' \quad \nu = \frac{g''}{\|g''\|} \quad \beta = \tau \wedge \nu. \quad (1.12)$$

On a utilisé l'hypothèse de birégularité pour définir ν . Rappelons que $\tau' = K\nu$ où K est la courbure. L'expression de ν' et β' dans la base (τ, ν, β) définit les *relations de Frenet* :

Proposition 1.3.1.2 (RELATION DE FRENET). Il existe une fonction $T: J \rightarrow \mathbf{R}$, appelée *torsion*, telle que

$$\begin{aligned} \tau' &= 0 & +K\nu & 0 \\ \nu' &= -K\tau & 0 & -T\beta \\ \beta' &= 0 & +T\nu & 0 \end{aligned}$$

On peut l'écrire plus simplement :

$$\tau' = K\nu \quad \nu' = -K\tau - T\beta \quad \beta' = T\nu.$$

Démonstration. On a les relations

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \tau, \tau \rangle = \langle \nu, \nu \rangle = \langle \beta, \beta \rangle \\ 0 &= \langle \tau, \nu \rangle = \langle \nu, \beta \rangle = \langle \tau, \beta \rangle. \end{aligned}$$

En dérivant $\langle \beta, \beta \rangle$, on a $\langle \beta', \beta \rangle = 0$. En dérivant $\langle \tau, \beta \rangle$, on obtient $\langle \tau', \beta \rangle = -\langle \tau, \beta' \rangle$, qui est égale à 0 puisque $\tau' = K\nu$. Ainsi, β' est colinéaire à ν . On appelle T le réel tel que $\beta' = T\nu$. En dérivant $\langle \nu, \nu \rangle$, on a $\langle \nu', \nu \rangle = 0$. En dérivant $\langle \tau, \nu \rangle$ on obtient $\langle \tau', \nu \rangle = -\langle \tau, \nu' \rangle$, qui est égale à K . En dérivant $\langle \nu, \beta \rangle$, on obtient $\langle \nu', \beta \rangle = -\langle \nu, \beta' \rangle$, qui est égale à $-T$. $\square$

La torsion mesure le défaut de planéité de la courbe : En effet, T est identiquement nulle si et seulement si β est constant. L'égalité $\beta^\perp = \text{Vect}\{\tau, \nu\}$ montre l'équivalence de la constance de β et celle du plan osculateur. Cette dernière est équivalente à la planéité de la courbe grâce au lemme 1.1.2.5. Le cadre présent permet de redémontrer le fait que la constance du plan osculateur implique la planéité de la courbe : puisque $\langle g', \beta \rangle = 0$, on a par intégration (en utilisant $\beta' = 0$) que $\langle g, \beta \rangle$ est constant, puis que $g(s) - g(s_0) \perp \beta$, c'est-à-dire que $g(s) \in g(s_0) + \beta^\perp$. Le signe de T renseigne sur la position de l'arc par rapport à son plan osculateur. En effet, par un développement limité, en utilisant $g^{(3)}(s) = (K\nu)' = K'\nu + K(-K\tau - T\beta)$, cela donne

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + s\tau(0) + \frac{s^2}{2}(K\nu)(0) + \frac{s^3}{6}(K'\nu - K^2\tau - KT\beta)(0) + o(s^3) \\ &= g(0) + \left(s - \frac{K^2s^3}{6}\right)\tau + \left(\frac{Ks^2}{2} + \frac{K's^3}{6}\right)\nu - \frac{KTs^3}{6}\beta + o(s^3). \end{aligned}$$

Pour $s > 0$ petit, le coefficient de ν est positif (on va toujours « à gauche » dans le plan osculateur) mais celui de β est négatif si $T > 0$ (on descend), positif si $T < 0$ (on monte). Dès que $T \neq 0$, la courbe traverse son plan osculateur.

1.3.2 Courbure et torsion déterminent la courbe

Si on connaît la courbure, qui indique de combien on tourne « à gauche » dans le plan osculateur et la torsion, qui indique de combien on monte ou on descend, on doit pouvoir reconstituer la trajectoire. Effectivement, courbure et torsion déterminent la courbe :

Théorème 1.3.2.1 (COURBURE ET TORSION DÉTERMINENT LA COURBE). Soit $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}_{>0})$, $T \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, (τ_0, ν_0, β_0) un repère orthonormé direct, $s_0 \in J$ et $p \in \mathbf{R}^3$. Il existe alors un unique arc birégulier (J, g) de classe $\mathcal{C}^3$, paramétré par la longueur, de courbure K et de torsion T , dont le repère de Frenet en $g(s_0) = p$ est (τ_0, ν_0, β_0) .

Démonstration. Les relations de Frenet écrites en coordonnées équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

soit

$$O'(s) = M(s)O(s) \tag{1.13}$$

où les lignes respectives de $O(s)$ sont les coordonnées de τ, ν, β respectivement, par exemple dans la base (τ_0, ν_0, β_0) . La condition initiale se traduit donc par $O(s_0) = I_3$. L'équation différentielle (1.13) étant linéaire d'ordre 1 et la fonction $s \mapsto M(s)$ étant continue sur J , le problème de Cauchy admet (par le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution $s \mapsto O(s)$ définie sur J . Vérifions que $O(s)$ reste orthogonale (ses vecteurs lignes sont alors orthonormés), c'est-à-dire que ${}^tO \cdot O = I_3$ ou de manière équivalente $O \cdot {}^tO = I_3$. On a

$$\begin{aligned} (O \cdot {}^tO)' &= O' \cdot {}^tO + O \cdot ({}^tO)' \\ &= MO \cdot {}^tO + O \cdot {}^t(MO) \\ &= MO \cdot {}^tO + O \cdot {}^tO \cdot {}^tM \\ &= MO \cdot {}^tO - O \cdot {}^tOM \end{aligned}$$

en utilisant l'antisymétrie de M . Cela signifie que $s \mapsto O \cdot {}^tO$ vérifie aussi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur J , de condition initiale $(O \cdot {}^tO)(s_0) = I_3$. Puisque la matrice identité I_3 est solution de cette équation et de même condition initiale, l'unicité de Cauchy implique que $(O \cdot {}^tO)(s) = I_3$ pour tout $s \in J$. On définit alors g par intégration :

$$g(s) = p + \int_{s_0}^s \tau(t) dt.$$

□

Remarque 1.3.2.2. Le théorème est faux sans l'hypothèse $K > 0$: d'abord la torsion n'est pas définie ; ensuite, même pour une courbe restreinte à un plan, sans signe sur la courbure, on ne peut distinguer un virage à gauche d'un virage à droite.

1.3.3 Formules

Pour le paramétrage par longueur d'arc (J, g) , on a

$$g' = \tau \quad g'' = \tau' = K\nu \quad g^{(3)} = K'\nu + K\nu' = -K^2\tau + K'\nu - KT\beta.$$

En particulier,

$$\det(g', g'', g^{(3)}) = -K^2T.$$

Pour (I, f) un paramétrage de A et θ le changement de paramétrage tel que $f = g \circ \theta$, on a

$$f' = \theta'g' \quad f'' = \theta''g' + \theta'^2g'' \quad f^{(3)} = \theta^{(3)}g' + 3\theta'\theta''g'' + \theta'^3g^{(3)}$$

d'où

$$\|f' \wedge f''\| = |\theta'|^3 K$$

et

$$\det(f', f'', f^{(3)}) = \det(\theta'g', \theta'^2g'', \theta'^3g^{(3)}) = \theta'^6(-K^2T)$$

donc

$$K = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3} \quad T = -\frac{\det(f', f'', f^{(3)})}{\|f' \wedge f''\|^2}.$$

2 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$

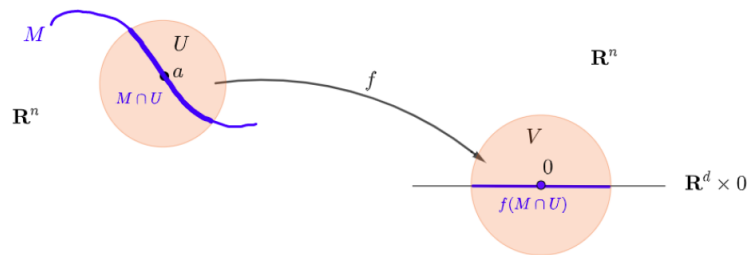
2.1 Introduction

La notion de *sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d* (avec $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$) généralise celle de sous-espace vectoriel : c'est localement un bout de sous-espace vectoriel déformé par un difféomorphisme ambiant. Sauf mention contraire, les objets considérés (applications, difféomorphismes, sous-variétés) seront de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbf{N}_{>0} \cup \{\infty\}$. Cette régularité exclut les cônes des sous-variétés par exemple.

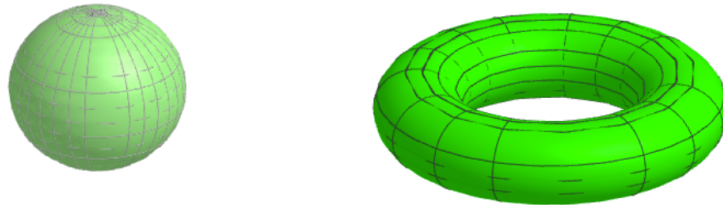
Définition 2.1.0.1 (SOUS-VARIÉTÉ PAR REDRESSEMENT). Une partie $M \subset \mathbf{R}^n$ est une *sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d* si pour tout $a \in M$, il existe des voisinages ouverts U et V de a et 0 dans $\mathbf{R}^n$ respectivement et un difféomorphisme

$$f: U \rightarrow V \quad \text{tel que} \quad f(M \cap U) = V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\}).$$

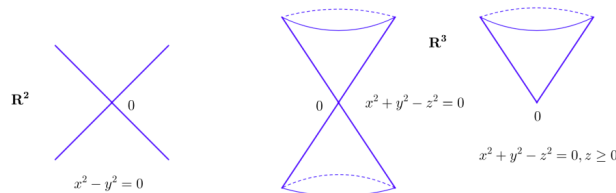
On peut remplacer $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ par tout espace affine de dimension d . La dimension d de M est unique puisque $V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ n'est difféomorphe à $V' \cap (\mathbf{R}^{d'} \times \{0\})$ que si $d = d'$.



Variété topologique : La restriction de f à $M \cap U$ (ouvert de M pour la topologie induite) est un homéomorphisme vers un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Il s'ensuit que M est localement homéomorphe à $\mathbf{R}^d$, ce qui est en fait une *variété topologique de dimension d* ² (espace topologique séparé localement homéomorphe à $\mathbf{R}^d$). La sphère et le tore de révolution sont d'honnêtes sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2, on verra plusieurs méthodes pour le prouver,



alors qu'un cône ($X \subset \mathbf{R}^n$ est un *cône* s'il est invariant par multiplication avec un scalaire : $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda > 0$) n'est pas une sous-variété.



Exemple 2.1.0.2. (1) La sphère $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension 2.
 (2) Dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 0\}$ ou même l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ ne sont même pas des variétés topologiques : sinon il existerait un voisinage W de 0 dans X homéomorphe à $\mathbf{R}^d$ et on voit que c'est absurde en comparant le nombre de composantes connexes de $W \setminus \{0\}$ et de $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$.
 (3) Dans $\mathbf{R}^3$, l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (z \geq 0) x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est une variété topologique mais n'est pas une sous-variété $\mathcal{C}^1$.

2. la dimension d d'une variété topologique est également unique mais c'est plus difficile à prouver pour $d \geq 2$: il faut le théorème d'invariance du domaine [Brouwer, 1912] pour prouver que $\mathbf{R}^d$ n'est homéomorphe à $\mathbf{R}^{d'}$ que si $d = d'$. Le cas $d = 1$ est facile : $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ a deux composantes connexes alors que $\mathbf{R}^{d'} \setminus \{0\}$ reste connexe si $d' \geq 2$.

La définition ci-dessus est heuristiquement simple mais pas très pratique. Nous allons voir plusieurs critères, en généralisant aux sous-variétés les descriptions d'un sous-espace vectoriel comme image ou noyau d'applications linéaires. Observons que $\mathbf{R}^d \times \{0\} \subset \mathbf{R}^n$.

Image de l'injection : Elle est définie par

$$\begin{aligned} i: \mathbf{R}^d &\rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Plus généralement, un sous-espace vectoriel de dimension d de $\mathbf{R}^n$ est l'image d'une application linéaire $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^n$ injective.

Noyau de la projection : Elle est définie par

$$\begin{aligned} \text{pr}: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} &\rightarrow \mathbf{R}^{n-d} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d est noyau d'une application linéaire $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ surjective (par le théorème du rang).

Puisqu'une sous-variété est localement un sous-espace vectoriel déformé par un difféomorphisme ambiant, on peut la décrire à l'aide d'une injection ou d'une projection déformée par un difféomorphisme ambiant. On appellera ces applications *immersion* et *submersion* respectivement.

2.2 Immersions, submersions

Commençons par donner des définitions des immersions et submersions en apparence différentes de celles proposées juste avant. Elles sont équivalentes aux précédentes et facile à tester.

Définition 2.2.0.1 (IMMERSION, SUBMERSION). (i) Une application $f: U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ est une *immersion* en $a \in U$ si sa différentielle $d_a f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ est injective. C'est une *immersion* sur U si c'est une immersion en chaque point de U .

(ii) On dit que f est une *submersion* en a si $d_a f$ est surjective. C'est une *submersion* sur U si c'est une submersion en chaque point de U .

Donnons quelques exemples :

Exemples triviaux : L'injection $i: x \in \mathbf{R}^d \rightarrow (x, 0) \in \mathbf{R}^n$ est une immersion puisque $d_a i = i$ est injective. La projection $\text{pr}: (x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} \rightarrow y \in \mathbf{R}^{n-d}$ est une submersion puisque $d_a \text{pr} = \text{pr}$ est surjective.

Composées : Une composée d'immersions est une immersion et une composée de submersions est une submersion. Un difféomorphisme ϕ de $\mathbf{R}^n$ est à la fois une immersion et une submersion.

Déformations par difféomorphisme : Il s'ensuit que $\phi \circ i$ est une immersion et $\text{pr} \circ \phi$ une submersion. Les propositions 2.2.0.2 et 2.2.0.7 ci-dessous, dites de redressement, montrent que localement, toute immersion s'écrit $\phi \circ i$ et toute submersion $\text{pr} \circ \phi$, où ϕ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbf{R}^n$.

Source de dimension 1 : On a

« L'application $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une immersion en $t \in I$ si et seulement si $f'(t) \neq 0$. »

En effet, $d_t f \cdot u = f'(t) \cdot u$ pour tout $u \in \mathbf{R}$. La différentielle $d_t f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est donc injective si et seulement si $f'(t) \neq 0$. Quand $d = 1$, les immersions sont les arcs paramétrés réguliers.

But de dimension 1 : On a :

« L'application $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est une submersion en x si et seulement si $d_x f \neq 0$. »

En effet, $d_x f(\mathbf{R}^n)$ est soit $\{0\}$, soit $\mathbf{R}$ tout entier (puisque $d_x(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$), donc $d_x f$ est surjective dès que $d_x f \neq 0$, soit aussi

$$\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \neq (0, \dots, 0).$$

Par exemple,

$$g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$$

est de gradient $\nabla_x g = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \neq 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, donc est une submersion sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$.

Tout graphe est une immersion : On a enfin :

« Toute $f: U \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{d+\ell}$ de la forme $f(x) = (x, h(x))$ ou $h: U \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ de classe $\mathcal{C}^k$, est une immersion sur U de classe $\mathcal{C}^k$. »

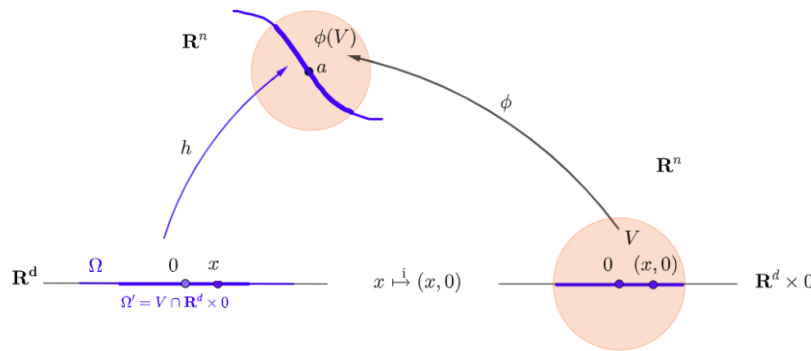
En effet, pour tout $v \in \mathbf{R}^d$, on a $d_x f(v) = (d_x \text{Id}(v), d_x h(v)) = (v, d_x h(v))$, donc $d_x f$ est injective.

Dans les énoncés ci-dessous, on travaille au voisinage de 0 pour simplifier, le cas général étant laissé au lecteur.

Proposition 2.2.0.2 (REDRESSEMENT DES IMMERSIONS). Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ une immersion en $0 \in \Omega$. Il existe alors un voisinage ouvert de V de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme $\phi: V \rightarrow \phi(V)$ tel que sur $\Omega' := V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$, on a

$$h(x) = \phi(x, 0) = \phi \circ i(x) \quad \text{avec} \quad i(x) = (x, 0): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}.$$

De manière équivalente, $\phi^{-1} \circ h = i$ sur Ω' .



Démonstration. Soit $h = (h_1, \dots, h_n)$ comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne de h en 0

$$J_0 h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_d}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_d}(0) \end{pmatrix}$$

est, par le théorème du rang, de rang $\dim(\text{Im}(d_0 h)) = \dim(\mathbf{R}^d) - \dim(\text{Ker}(d_0 h)) = d$ puisque $d_0 h$ est injective. Quitte à permuter les coordonnées à l'arrivée (en composant h avec un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$) on peut échanger les lignes $\nabla h_i \leftrightarrow \nabla h_j$ de $J_0 h$ de sorte que les d premières soient indépendantes, la matrice

$$A := \begin{pmatrix} \nabla h_1(0) \\ \vdots \\ \nabla h_d(0) \end{pmatrix}$$

étant alors inversible. On étend h en une application $H: \Omega \times \mathbf{R}^{n-d} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ en posant

$$(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \mapsto (h_1(x), \dots, h_d(x), y_1 + h_{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + h_n(x))$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$. Clairement, $H(x, 0) = h(x)$ pour tout $x \in \Omega$. La matrice jacobienne de H en $0 \in \mathbf{R}^n$ est de la forme

$$J_0 H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I_{n-d} \end{pmatrix}$$

donc est inversible. Par le théorème d'inversion locale, H est un difféomorphisme sur un voisinage V de 0. On appelle ϕ la restriction de H à V . $\square$

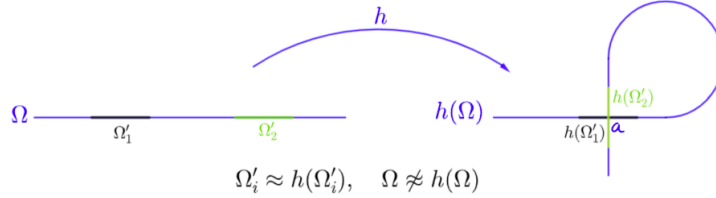
Remarque 2.2.0.3. Puisque $h = \phi \circ i$ sur Ω' , c'est une immersion injective sur Ω' comme composée d'immersions injectives. Ainsi, être une immersion est une condition ouverte et toute immersion est localement injective.

Corollaire 2.2.0.4. Soit $h: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^n$ une immersion. Tout point de Ω admet alors un voisinage ouvert Ω' tel que $h(\Omega')$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et $h: \Omega' \rightarrow h(\Omega')$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Quitte à pré-composer h par une translation, on se place en $0 \in \mathbf{R}^d$. Considérons l'ouvert $\Omega' = V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ donné par la proposition 2.2.0.2. Le redressement de $h(\Omega') \cap \phi(V)$ vers $V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ fourni par le difféomorphisme $\phi^{-1}: \phi(V) \rightarrow V$ prouve que $h(\Omega')$ est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$. Montrons que $h: \Omega' \rightarrow h(\Omega')$ est un homéomorphisme. D'abord, l'égalité $\phi^{-1} \circ h(x) = (x, 0)$ sur Ω' prouve que h est injective et admet donc une réciproque $h^{-1}: h(\Omega') \rightarrow \Omega'$. L'égalité prouve ensuite que h^{-1} s'obtient de ϕ^{-1} comme sa première composante dans le produit $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$, c'est-à-dire $h^{-1} = \text{pr}_1 \circ \phi^{-1}$ sur $h(\Omega')$. L'application $\text{pr}_1 \circ \phi^{-1}$ est lisse sur $\phi(V)$ par composition d'applications lisses. Il s'ensuit h^{-1} est continue sur $h(\Omega')$ muni de la topologie induite, comme restriction $\text{pr}_1 \circ \phi^{-1}$ à $h(\Omega')$. $\square$

Remarque 2.2.0.5. Attention ! On prendra garde que $h(\Omega)$ n'est pas nécessairement une sous-variété, ni même une variété topologique !

Exemple 2.2.0.6. Ci-dessous, une immersion $h: \Omega \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $h(\Omega)$ n'est pas une variété topologique, mais pour $i = 1, 2$, l'ensemble $h(\Omega'_i)$ est une sous-variété et $h: \Omega'_i \rightarrow h(\Omega'_i)$ un homéomorphisme (exercice : trouver un paramétrage convenable de h). En effet, $h(\Omega)$ n'est pas une variété topologique : s'il existait un voisinage $W \subset h(\Omega)$ de a homéomorphe à $\mathbf{R}$, alors $W \setminus \{a\}$ serait homéomorphe à $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; or c'est impossible vu leur nombre différent de composantes connexes. Pourtant, $h(\Omega'_i)$ est homéomorphe à Ω'_i donc à $\mathbf{R}$... Le point clé est que $h(\Omega'_i)$ n'est pas un ouvert de $h(\Omega)$. Ce phénomène peut arriver même quand h est injective sur Ω !

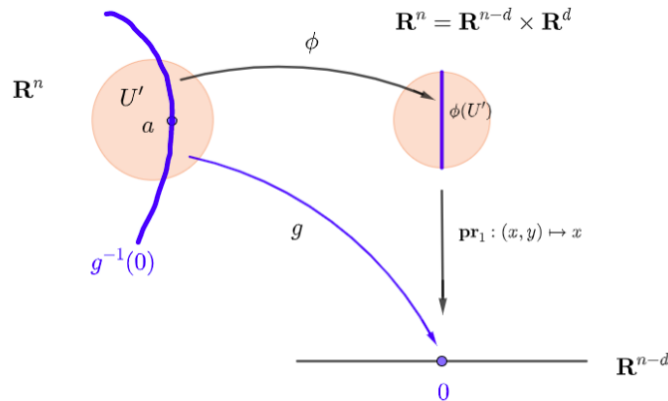


Proposition 2.2.0.7 (REDRESSEMENT DES SUBMERSIONS). Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $g: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ une submersion en $a \in U$ telle que $g(a) = 0$. Il existe alors un difféomorphisme ϕ d'un voisinage U' de a dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage $\phi(U')$ de 0 tel que sur U'

$$g = \text{pr}_1 \circ \phi \quad \text{avec} \quad \text{pr}_1(x, y) = x: \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}.$$

De manière équivalente $g \circ \phi^{-1} = \text{pr}_1$ sur $\phi(U')$.

Remarque 2.2.0.8. Quitte à composer ϕ avec $(x, y) \mapsto (y, x)$, $\mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$, on peut écrire $g = \text{pr}_2 \circ \phi$ où $\text{pr}_2(x, y) = y$.



Démonstration. Soit $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$ comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne de g en a

$$J_a g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang $n - d$ par hypothèse. Quitte à changer les coordonnées au départ (en précomposant g avec un isomorphisme) on peut échanger les colonnes de $J_a g$ pour supposer que les $n - d$ premières soient de rang $n - d$, donc que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-d}}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_{n-d}}(a) \end{pmatrix}$$

soit inversible. On définit $G: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1(x), \dots, g_{n-d}(x), x_{n-d+1}, \dots, x_n)$$

On voit que $\text{pr}_1 \circ G = g$. La matrice jacobienne de G en a est de la forme

$$J_a G = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & I_d \end{pmatrix}$$

donc est inversible. Par le théorème d'inversion locale, G est un difféomorphisme d'un voisinage U' de a dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage $\phi(U')$ de 0. On appelle ϕ la restriction de G entre ces voisinages. $\square$

Remarque 2.2.0.9. (1) Puisque $g = \text{pr}_1 \circ \phi$ sur le voisinage ouvert U' de a , il en résulte qu'être une submersion est une condition ouverte.

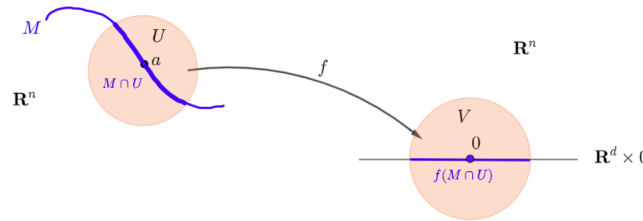
(2) Si g est une submersion sur U , alors $g^{-1}(0) \cap U$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d . En effet, le redressement de $g^{-1}(0) \cap U'$ vers $\phi(U') \cap (\{0\} \times \mathbf{R}^d)$ fourni par ϕ prouve que $g^{-1}(0) \cap U'$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ dimension de d .

2.3 Caractérisations d'une sous-variété

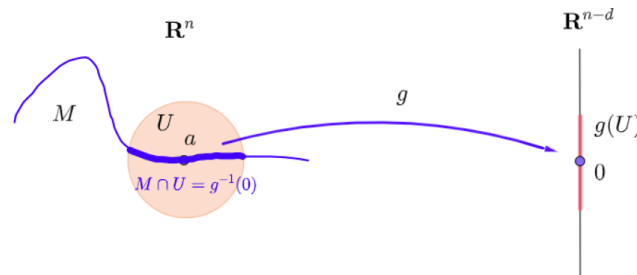
On arrive à l'essentiel :

Théorème 2.3.0.1 (CARACTÉRISATION DES SOUS-VARIÉTÉS). Soit M une partie de $\mathbf{R}^n$. Sont équivalents :

(i) (REDRESSEMENT PAR DIFFÉOMORPHISME). M est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d : pour tout $a \in M$, il existe des voisinages ouverts U et V de a et 0 dans $\mathbf{R}^n$ respectivement et un difféomorphisme $f: U \rightarrow V$, tel que $f(M \cap U) = V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$.



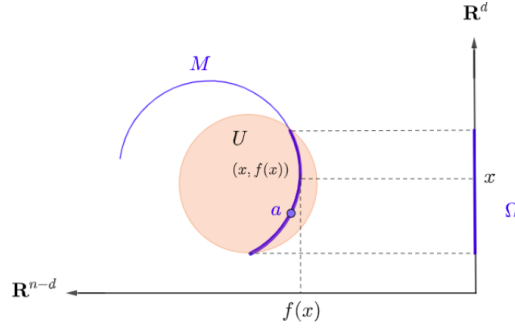
(ii) (« NOYAU » D'UNE SUBMERSION). Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ contenant a et une submersion $g: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ telle que $M \cap U = g^{-1}(0)$.



(iii) (IMAGE HOMÉOMORPHIQUE D'UNE IMMERSION). Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ contenant a , un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ et une immersion $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ qui est un homéomorphisme $\Omega \rightarrow M \cap U$.

(iv) (GRAPHE). Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a , un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ et une application $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ telle que, après permutation éventuelle des coordonnées,

$$M \cap U = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}; x \in \Omega\} = \text{Graphe}(f).$$



Démonstration. Montrons d'abord (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii). Soit $a \in M$. D'après (i), il existe un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ contenant a et un difféomorphisme

$$f: U \rightarrow f(U) \subset \mathbf{R}^n \text{ tel que } f(M \cap U) = f(U) \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\}).$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Notons

$$\begin{aligned} \text{pr}_2: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} &\rightarrow \mathbf{R}^{n-d} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

la projection sur le deuxième facteur, alors $g := \text{pr}_2 \circ f$ est une submersion $U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ et $M \cap U = g^{-1}(0)$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Le difféomorphisme $h := f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ est une immersion et sa restriction à $\Omega := f(U) \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ est un homéomorphisme sur $M \cap U$.

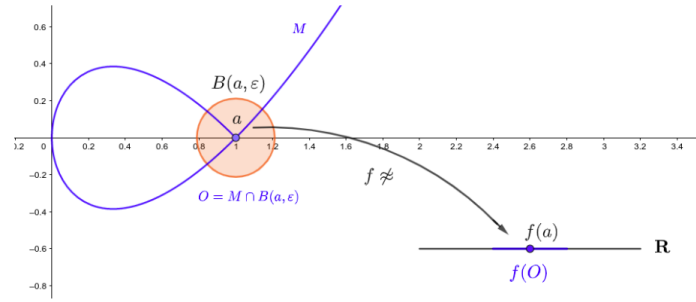
(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $g: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ la submersion définie au voisinage de a telle que $M \cap U = g^{-1}(0)$. Comme observé dans la remarque précédente, $M \cap U = g^{-1}(0) \cap U$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d . Ceci étant vrai pour tout $a \in M$, il s'ensuit que M est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d .

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soient $a \in M$, $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert contenant a , $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ une immersion telle que $h: \Omega \rightarrow M \cap U$ soit un homéomorphisme, en particulier $h(\Omega) = M \cap U$. Quitte à pré-composer h par une translation on peut supposer que Ω contient 0 et que $h(0) = a$. Par redressement des immersions, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage de $\phi(V)$ de a tel que $h(x_1, \dots, x_d) = \phi(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$, sur $\Omega' = V \cap \mathbf{R}^d \times \{0\}$, soit aussi $\phi^{-1} \circ h(x) = (x, 0) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$ sur Ω' . Quitte à restreindre U et Ω on peut supposer ϕ^{-1} défini sur U avec encore $h: \Omega \rightarrow M \cap U$ un homéomorphisme. Notons que $\Omega = h^{-1}(M \cap U) = h^{-1}(U) = \phi^{-1}(\phi^{-1}(U)) = \phi^{-1}(U) \cap \mathbf{R}^d \times \{0\}$. Le difféomorphisme $f := \phi^{-1}$ redresse $M \cap U$ comme dans la définition 2.1.0.1. En effet, $\phi^{-1}(M \cap U) = \phi^{-1}(h(\Omega)) = \Omega \times \{0\} = \phi^{-1}(U) \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$. (iv) $\Rightarrow$ (iii). Par hypothèse, après permutation de coordonnées il existe U un voisinage de x dans $\mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ de classe C^k tel que $M \cap U = \{(x, f(x)); x \in \Omega\}$. On définit $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$ par $h(x) = (x, f(x))$. La matrice Jacobienne $J_x h$ contient un bloc I_d , donc est de rang d prouvant que h est une immersion sur Ω . L'injectivité de h est claire et $h(\Omega) = U \cap M$. Tout $(x, y) \in U \cap M$ est de la forme $(x, f(x))$, donc $h^{-1}(x, y) = x$ sur $U \cap M$ et est ainsi continue comme restriction de $(x, y) \mapsto x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). C'est le théorème des fonctions implicites. Faisons la preuve. Soit $g = (g_1, \dots, g_{n-d}): U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ la submersion au voisinage de a telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. Par redressement des submersions et la remarque précédente, il existe un difféomorphisme ϕ défini au voisinage de a tel que $g = \text{pr}_2 \circ \phi$. Adaptant la preuve de la proposition 2.2.0.7, on choisit ϕ comme restriction de $G(x) = (x_1, \dots, x_d, g_1(x), \dots, g_{n-d}(x))$, qu'on suppose définie sur U quitte à le restreindre. Soit $V = \phi(U)$. Clairement ϕ^{-1} est de la forme $\phi^{-1}(x, y) = (x, F(x, y))$ où $F: V \rightarrow \mathbf{R}^d$. En particulier, en restriction à $V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$, on a $\phi^{-1}(x, 0) = (x, F(x, 0))$. On pose donc $\Omega = V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$, $f(x) = F(x, 0)$. On a alors $M \cap U = \phi^{-1}(\Omega) = \{(x, f(x)); x \in \Omega\}$. $\square$

Remarque 2.3.0.2. Attention ! En (iii) on demande à l'immersion h d'être un homéomorphisme $\Omega \rightarrow M \cap U$. Une immersion injective ne suffit pas, la continuité de h^{-1} est nécessaire !

Exemple 2.3.0.3. Soit $M = h[-\infty, 1] \subset \mathbf{R}^2$ où $h(t) = (t^2, t - t^3)$. L'application h est alors une immersion injective mais M n'est pas une variété topologique en $a = h(-1) = \lim_{t \rightarrow -1} h(t)$. Sinon il existerait un homéomorphisme $f: O = B(a, \varepsilon) \rightarrow f(O)$ un intervalle ouvert et $O \setminus a$ serait homéomorphe à $f(O) \setminus f(a)$. Mais $O \setminus a$ a trois composantes connexes (ε petit) et $f(O) \setminus f(a)$ en a deux, ce qui est absurde.



Définition 2.3.0.4 (PARAMÉTRISATION). Soit $M \subset \mathbf{R}^n$. On dit que $h: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow M$ est une *paramétrisation* de M si :

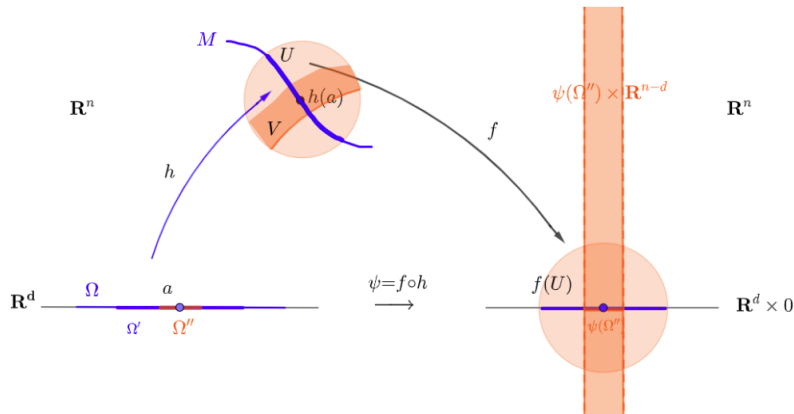
- (i) $h: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une immersion ;
- (ii) $h: \Omega \rightarrow h(\Omega)$ est un homéomorphisme ;
- (iii) $h(\Omega)$ est un ouvert de M , i.e. $h(\Omega) = M \cap U$ pour un ouvert U de $\mathbf{R}^n$.

On dit que h est une *paramétrisation locale* de M si tout $x \in \Omega$ admet un voisinage ouvert Ω' sur lequel h est une paramétrisation de M .

Cette paramétrisation prouve que $M \cap U$ est une sous-variété de dimension d . Réciproquement, une immersion dans une sous-variété de la bonne dimension est une paramétrisation locale :

Proposition 2.3.0.5 (QUAND UNE IMMERSION EST FORCÉMENT UNE PARAMÉTRISATION). Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et soit $h: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow M \subset \mathbf{R}^n$ une immersion. L'application h est alors une paramétrisation locale de M . Si on suppose de plus h injective, alors h est une paramétrisation de M .

Démonstration. Heuristique : une immersion entre deux objets lisses de dimension d satisfait un « théorème d'inversion locale », donc h devrait être un « difféomorphisme local » entre Ω et M et en particulier un homéomorphisme local. On implémente cette idée via un redressement de M . Soit $a \in \Omega$. Puisque M est une sous-variété de dimension d , il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ de $h(a)$ et un difféomorphisme $f: U \rightarrow f(U)$ tel que $f(M \cap U) = f(U) \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$. Soit $\Omega' = h^{-1}(U) \subset \Omega$, c'est un voisinage ouvert de $a \in \mathbf{R}^d$. La composée $\psi = f \circ h: \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^d \times \{0\}$ est une immersion à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, donc $d_a \psi$ est un isomorphisme. Il s'ensuit par inversion locale que ψ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert $\Omega'' \subset \Omega'$ de a vers $\psi(\Omega'') \subset \mathbf{R}^d \times \{0\}$.



Montrons que Ω'' satisfait le deuxième et le troisième point de la définition 2.3.0.4. Posons $V = f^{-1}(\psi(\Omega'') \times \mathbf{R}^{n-d}) \subset \mathbf{R}^n$. C'est un voisinage ouvert de $h(a)$ dans $\mathbf{R}^n$ et $M \cap V = f^{-1}(\psi(\Omega'') \times \{0\}) = h(\Omega'')$. Ceci établit que $h(\Omega'')$ est ouvert dans M . Comme h est sur Ω'' , la composée de ψ avec f^{-1} restreinte à $\psi(\Omega'') \times \{0\}$ est un homéomorphisme $\Omega'' \rightarrow h(\Omega'')$. Maintenant, supposons de plus h injective. Pour chaque $a \in \Omega$, il existe un ouvert $\Omega_a \subset \Omega$ contenant a et un ouvert $V_a \subset \mathbf{R}^n$ contenant $h(a)$ tel que h soit un homéomorphisme entre Ω_a et $V_a \cap M$. Posons $V = \bigcup_{a \in \Omega} V_a$, c'est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $h(\Omega) = M \cap V$. De plus, h^{-1} est continue puisque la continuité est une propriété locale, qui est vérifiée sur tous les $M \cap V_a$ et que ces ouverts de M recouvrent $M \cap V$. Ainsi, h est un homéomorphisme entre Ω et l'ouvert $M \cap V$ de M . $\square$

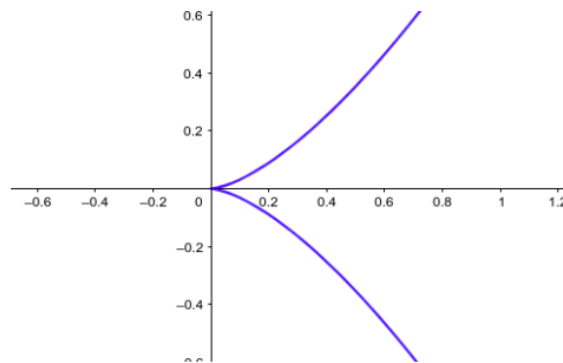
Par exemple, l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ est une paramétrisation locale de $\mathbf{S}^1$ et sa restriction à chaque $]t, t + 2\pi[$ en est une paramétrisation. Pour tout graphe $M = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{d+1}; x \in \Omega\}$ où $f: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, l'application $h(x) = (x, f(x))$ est une paramétrisation de M . Cela se vérifie immédiatement, sans invoquer la proposition précédente, vu que h^{-1} est la restriction à M de $(x, y) \mapsto x$.

2.4 Exemples

Sphère : On note $\mathbf{S}^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$. On montre que c'est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ de dimension n en considérant $g: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathbf{S}^n = g^{-1}(0)$. Puisque $\nabla_x g = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) \neq 0$ si $x \neq 0$, g est une submersion sur $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \mathbf{S}^n$ d'où le résultat.

Tore : Soit $\mathbf{T}^n = \{x \in \mathbf{R}^{2n}; x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\} = \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^{2n}$. On prouve que c'est une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n}$ de dimension n en considérant $g: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^n; x \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1)$ qui est une submersion sur $\mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\} \supset g^{-1}(0) = \mathbf{T}^n$.

Variété topologique mais pas sous-variété $\mathcal{C}^1$: Soit $M = f(\mathbf{R})$ le support de l'arc paramétré $f(t) = (t^2, t^3) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble $M \setminus \{0\}$ est alors une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^2$ de dimension 1 mais M n'est pas une sous-variété $\mathcal{C}^1$.



En effet, $M \cap \{y > 0\}$ est le graphe de $x \mapsto x^{3/2}$ lisse sur $\Omega =]0, +\infty[$ et de même, $M \cap \{y < 0\}$ est le graphe de $x \mapsto -x^{3/2}$, donc $M \setminus \{0\}$ est bien une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 1. Montrons que M n'est pas une sous-variété. Le fait que f ne soit pas une immersion en 0 n'est pas conclusif. Par contradiction, supposons que M soit une sous-variété, nécessairement de dimension 1. D'après la caractérisation (iv) du théorème 2.3.0.1, M est au voisinage de $(0,0)$ un graphe de la forme $\{(x, F(x)); x \in \Omega\}$ ou $\{(F(y), y); y \in \Omega\}$ pour F de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage $\Omega \subset \mathbf{R}$ de 0. Dans le premier cas, M contiendrait des points $(x, F(x))$ avec $x < 0$, ce qui est exclu car $t^2 \geq 0$. Considérons le deuxième cas. Si $(x, y) \in M$ alors $x^3 = y^3$, donc $(F(y), y)$ vérifie $F^3(y) = y^2$ près de $y = 0$. Ainsi, $F(y) = y^{2/3}$ mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2.4.0.1 (TORE DE RÉVOLUTION). Soit $0 < a < b$. Soit $A \subset \mathbf{R}^3$ le cercle de $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ centré en 0 de rayon b . Soit $T \subset \mathbf{R}^3$ l'ensemble des points à distance a de A (on dit que A est l'âme de T). Prouver à l'aide d'une submersion que T est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 (on pourra exprimer que $(x, y, z) \in T$ en termes de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et z). Donner une paramétrisation de T (on pourra paramétrer le cercle de rayon a centré en $(b, 0, 0)$ dans le plan (xz) puis faire tourner autour de l'axe des z).

2.5 Espace tangent

Définition 2.5.0.1 (ESPACE TANGENT). Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et soit $a \in M$. On dit que $v \in \mathbf{R}^n$ est *tangent* à M en a s'il existe une courbe différentiable $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}^n$ contenue dans M telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. On appelle *espace tangent* à M en a l'ensemble $T_a M$ de ces vecteurs.

C'est l'ensemble des vecteurs vitesse en a des courbes de M passant par a .

Proposition 2.5.0.2 (L'ESPACE TANGENT EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL). Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et soit $a \in M$, alors $T_a M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d .

Démonstration. Par définition d'une sous-variété, il existe des ouverts $U, V \subset \mathbf{R}^n$ contenant a et 0 respectivement et un difféomorphisme $f: U \rightarrow V$ tel que $f(M \cap U) = V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$. Il suffit de montrer que $T_a M = (d_a f)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\})$.

• Commençons par montrer l'inclusion $T_a M \subset (d_a f)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\})$, i.e. si $v \in T_a M$, alors $d_a f(v) \in \mathbf{R}^d \times \{0\}$. Soit donc $v \in T_a M$ et $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ une courbe différentiable telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. On peut supposer $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U$, donc $f \circ c$ est bien définie. Elle est différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}^d \times \{0\}$, donc

$$d_a f(v) = d_{c(0)} f(c'(0)) = (f \circ c)'(0) \in \mathbf{R}^d \times \{0\}$$

d'où la première inclusion.

• Réciproquement, soit $w \in \mathbf{R}^d \times \{0\}$, montrons que $(d_a f)^{-1}(w) \in T_a M$, i.e. $(d_a f)^{-1}(w) = c'(0)$ pour une courbe à valeurs dans M telle que $c(0) = a$. On sait que $f(a) \in V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ donc $f(a) + tw \in V \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$ pour tout t voisin de 0. On peut donc définir pour $\varepsilon > 0$ assez petit une courbe différentiable $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ en posant $c(t) = f^{-1}(f(a) + tw)$. Elle vérifie $c(0) = a$ et $c'(0) = d_{f(a)} f^{-1}(w) = (d_a f)^{-1}(w)$ comme voulu. Ainsi, $(d_a f)^{-1}(w) \in T_a M$ ce qui donne l'inclusion $(d_a f)^{-1}(\mathbf{R}^d \times \{0\}) \subset T_a M$ et l'égalité. $\square$

Exemple 2.5.0.3 (CÔNE POSITIF). Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. L'ensemble $M \setminus \{0\}$ est alors une sous-variété de dimension 2 mais M n'en est pas une. En effet, $M = g^{-1}(0)$ pour $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$, de gradient $\nabla_{(x,y,z)} g = (2x, 2y, -2z) \neq 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} =: U$ donc $g|_U$ sa restriction à U est une submersion. Il s'ensuit que $M \setminus \{0\} = (M \setminus \{0\}) \cap U = (g|_U)^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension 2. Montrons que M n'est pas une sous-variété de dimension 2.

Heuristique : M n'a pas d'espace tangent en 0 car il contient trois demi-droites aboutissant en 0 dont les vecteurs vitesse sont indépendants. Si M était « lisse » en 0 on pourrait prolonger ces demi-droites dans M et obtenir que $T_0 M$ est de dimension ≥ 3 , ce qui est absurde.

En effet, considérons les trois vecteurs indépendants $u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (0, -1, -1)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$ et les trois demi-droites $t \in]-\infty, 0] \mapsto c_i(t) = tu_i$ contenues dans M . Supposons par contradiction qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{R}^3$ et un difféomorphisme $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ tel que $\phi(M \cap U) = \phi(U) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$. Pour $t \in]-\varepsilon, 0]$, on a $c_i(t) \in M \cap U$ donc $\phi(c_i(t)) \in \phi(U) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$. On prolonge $\phi \circ c_i$ sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ par $t \mapsto \phi(0) + td_0 \phi(u_i)$ en une courbe α_i contenue dans $\phi(U) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\})$ (pour ε petit) et différentiable. $] -\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \tilde{c}_i(t) := \phi^{-1}(\alpha_i(t))$ est alors différentiable, contenue dans M et vérifie $\tilde{c}_i(0) = 0$ et $\tilde{c}'_i(0) = u_i$, d'où la contradiction.

Une description locale de M via une submersion, une immersion ou un graphe induit une description de $T_a M$ du même type via la différentielle de l'application :

Submersion : Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un voisinage de a et $g: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ une submersion en a telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. On a alors

$$T_a M = \text{Ker}(d_a g).$$

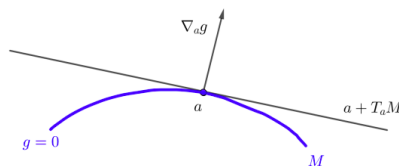
En effet, les sous-espaces vectoriels $T_a M$ et $\text{Ker}(d_a g)$ ayant la même dimension, il suffit de vérifier que $T_a M \subset \text{Ker}(d_a g)$. De plus, si $v \in T_a M$ est le vecteur vitesse en a d'une courbe $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$, on a $g \circ c(t) = 0$ pour t voisin de 0, d'où

$$d_a g \cdot v = d_a g \cdot c'(0) = (g \circ c)'(0) = 0$$

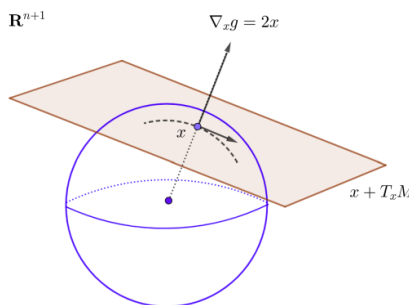
et le résultat.

Submersion, cas des hypersurfaces ($d = n - 1$) : Si M est de dimension $d = n - 1$, alors g est à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $d_a g \cdot v = \langle \nabla_a g, v \rangle$, donc

$$T_a M = \text{Ker}(d_a g) = (\nabla_a g)^\perp.$$



L'espace tangent est donc l'orthogonal du gradient de la submersion. Par exemple, en écrivant $\mathbf{S}^n = g^{-1}(0)$ pour la submersion $g(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$ de $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{R}$, on en déduit de $\nabla_x g = 2x$ que $T_x \mathbf{S}^n = x^\perp$ pour tout $x \in \mathbf{S}^n$.



Revenons au cas général où $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$, alors $\text{Ker}(d_a g) = \bigcap_i \text{Ker}(d_a g_i)$, donc

$$T_a M = (\nabla_a g_1)^\perp \cap \dots \cap (\nabla_a g_{n-d})^\perp.$$

Immersion : Soit $a \in M$ et soit $h: \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^n$ une paramétrisation de M telle que $a \in h(\Omega)$. On peut supposer que $a = h(0)$. On a alors

$$T_a M = d_0 h(\mathbf{R}^d).$$

En effet, puisque $d_a h$ est injective, $\dim(d_0 h(\mathbf{R}^d)) = d$ donc il suffit de montrer l'inclusion $T_a M \supset d_0 h(\mathbf{R}^d)$. Soit $v \in \mathbf{R}^d$, pour t voisin de 0 la courbe $t \mapsto c(t) = h(tv) \in \mathbf{R}^n$ est définie, différentiable, contenue dans M et $c(0) = a$ donc $d_0 h \cdot v = c'(0) \in T_a M$. L'image de la base canonique $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbf{R}^d$ par $d_0 h$ munit $T_a M$ de la base

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_d}(0) \right)$$

formée des dérivées partielles (on rappelle que $d_a h \cdot e_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$), souvent utilisée.

Graphe : Soit U un voisinage de a dans $\mathbf{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$, un ouvert V de $\mathbf{R}^d$ et $f: V \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $U \cap M = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}; x \in V\}$. Supposons que $a = (x_0, f(x_0))$, alors

$$T_a M = \{(w, d_{x_0} f \cdot w) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}; w \in \mathbf{R}^d\} = \text{Graphe}(d_{x_0} f).$$

En effet, pour tout vecteur $w \in \mathbf{R}^d$, la courbe $t \mapsto (x_0 + tw, f(x_0 + tw)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$ est contenue dans M (t petit), différentiable dans $\mathbf{R}^n$ de vecteur vitesse en a égal à $v = (w, d_{x_0} f \cdot w)$. Ceci montre que $T_a M$ contient le graphe de $d_{x_0} f$. Comme le graphe d'une application linéaire définie sur $\mathbf{R}^d$ est un sous-espace vectoriel de dimension d , on a égalité.

2.6 Extrêmes liés

On cherche les extrêmes de $F: M \rightarrow \mathbf{R}$ lisse au voisinage de M . Heuristiquement, la « différentielle » $d_a(F|_M)$ devrait s'annuler en l'extréma a . Cela fonctionne en calculant $d_a(F|_M)$ comme $(d_a F)|_{T_a M}$.

Définition 2.6.0.1 (POINT CRITIQUE). Soient M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M . On dit que $a \in M$ est un *point critique* de $F|_M$ si $d_a F = 0$ sur $T_a M$.

Théorème 2.6.0.2 (EXTRÊMES LIÉS). Soient M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M .

(i) Si $F|_M$ admet un extréma local en a , alors a est un point critique de $F|_M$.

(ii) Si $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$ est une submersion telle que $M = g^{-1}(0)$ au voisinage de $a \in M$, alors a est un point critique de $F|_M$ si et seulement si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbf{R}^{n-d}$ tels que

$$d_a F = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}.$$

Les réels λ_i sont appelés *multiplieurs de Lagrange*.

Démonstration. (i) Soit $v \in T_a M$ et $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée sur M telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. La fonction d'une variable $t \mapsto F \circ c(t)$ admet un extremum local en $t = 0$ donc $0 = (F \circ c)'(0) = d_{c(0)} F \cdot c'(0) = d_a F \cdot v$. Ceci prouve que $d_a F = 0$ sur $T_a M$, comme voulu.

(ii) g étant une submersion, les formes linéaires $d_a g_1, \dots, d_a g_{n-d}$ sont linéairement indépendantes donc $d_a F = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}$ équivaut à $\text{rg}(d_a g_1, \dots, d_a g_{n-d}, d_a F) = n - d$. Soit a un point critique de $F|_M$ i.e. $d_a F(T_a M) = 0$. Puisque $T_a M = \text{Ker}(d_a g)$, l'application linéaire $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$v \mapsto (d_a g_1 v, \dots, d_a g_{n-d} v, d_a F v)$$

est de noyau $T_a M$ d -dimensionnel donc de rang $n - d$ comme voulu. La réciproque est immédiate : si $d_a F = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}$ est vraie, alors $d_a F = 0$ sur $T_a M$ puisque $d_a g(T_a M) = 0$. $\square$

Extrêmes liés, cas d'une hypersurface ($d = n - 1$) : On a alors $d_a F = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}$ équivaut à $\nabla_a F$ colinéaire à $\nabla_a g$. Comme $(\nabla_a g)^\perp = T_a M$, cela équivaut à $\nabla_a F$ normal à $T_a M$. On en déduit

$$a \text{ point critique de } F|_M \Leftrightarrow \nabla_a F \perp T_a M.$$

3 Étude métrique locale des surfaces de $\mathbf{R}^3$

On étudie la géométrie locale des surfaces $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$, qu'on essaye d'appréhender via une paramétrisation $f: U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \Sigma$. On pense à U comme à « une carte » de Σ sur laquelle mesurer diverses quantités géométriques : longueur de courbes, angles de vecteurs tangents, aire de domaines, courbure(s). Comme f n'est pas une isométrie, pour que les mesures dans U reflètent la géométrie de Σ , on remplace en chaque $x \in U$ le produit scalaire de $\mathbf{R}^2$ par un produit scalaire dépendant de x , obtenu via f . L'objet obtenu est une *métrique Riemannienne* sur U . Dans tout ce chapitre, on supposera que (U, f) est une paramétrisation de Σ au voisinage des points étudiés.

3.1 Première forme fondamentale

3.1.1 Rappels sur les produits scalaires

Produit scalaire : Sur un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , l'application $b: E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ est bilinéaire symétrique et définie positive ($b(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$). Si E a pour base $e = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice symétrique $M = M(b)_e = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ (dite *matrice de Gram*) détermine le produit scalaire via

$$b(x, y) = b\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j b(e_i, e_j) = (x_1, \dots, x_n) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t[x]_e M [y]_e.$$

Tiré en arrière ou image réciproque : Étant donnés $L: E \rightarrow F$ linéaire injective et b_F un produit scalaire sur F , on obtient un produit scalaire sur E , le *tiré en arrière* ou *image réciproque* L^*b_F de b_F par L , en poussant les vecteurs :

$$(\forall x, y \in E) \quad (L^*b_F)(x, y) := b_F(Lx, Ly).$$

L'application $L: (E, L^*b_F) \rightarrow (F, b_F)$ est alors isométrique. Appliqué en $a \in U$ à $d_a f: \mathbf{R}^2 \rightarrow (\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ linéaire injective, on obtient un produit scalaire $g_a := d_a f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbf{R}^2$ (dépendant de a et de f). Comme $d_a f(\mathbf{R}^2) = T_{f(a)}\Sigma \subset \mathbf{R}^3$, cela revient à tirer en arrière la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $T_{f(a)}\Sigma$. On commence par étudier cette restriction.

3.1.2 Première forme fondamentale, expression locale

Définition 3.1.2.1 (PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE). La *première forme fondamentale* en $p \in \Sigma$, notée I_p , est le produit scalaire sur $T_p\Sigma$ défini par :

$$(\forall X, Y \in T_p\Sigma) \quad I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Soit $x \in U$ tel que $f(x) = p$, alors $d_x f: \mathbf{R}^2 \rightarrow T_p\Sigma$ est un isomorphisme. Soit $e = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbf{R}^2$ et soit (x_1, x_2) les coordonnées de x dans cette base. On a alors que $(d_x f(e_1), d_x f(e_2)) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)) =: d_x f(e)$ est une base de $T_{f(x)}\Sigma$. La matrice de Gram de $I_{f(x)}$ dans cette base est

$$M_{f,e}(x) = \begin{pmatrix} \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle & \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle \\ \langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle & \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

Définition 3.1.2.2. L'application $x \in U \mapsto M_{f,e}(x) \in M_2(\mathbf{R})$ qui associe x à la matrice de Gram de $I_{f(x)}$ dans $(\partial_1 f(x), \partial_2 f(x))$ est appelée *expression de la première forme fondamentale* dans les coordonnées (U, f) .

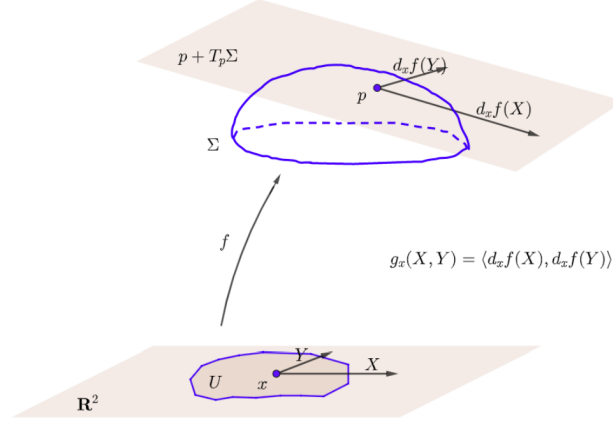
Elle dépend de f et e mais pourra être notée $M(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Synthétiquement :

$$M(x) = {}^t J_x f \cdot J_x f \tag{3.1}$$

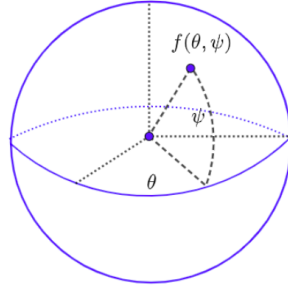
que l'on peut vérifier en exercice.

Pour $x \in U$ on définit $g_x := (d_x f)^* I_{f(x)} = (d_x f)^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ le tiré en arrière de $I_{f(x)}$ par $d_x f$. C'est le produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$ défini par $g_x(X, Y) = \langle d_x f \cdot X, d_x f \cdot Y \rangle$. Puisque $d_x f(e_i) = \partial_i f(x)$ on a $g_x(e_i, e_j) = \langle d_x f(e_i), d_x f(e_j) \rangle = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle$, donc $M(g_x)_e = M_{f,e}(x)$. C'est normal puisque $d_x f: (\mathbf{R}^2, g_x) \rightarrow (T_{f(x)}\Sigma, I_{f(x)})$ est une isométrie envoyant base sur base. L'application lisse $x \in U \mapsto g_x$ est une *métrique Riemannienne* sur U et le couple (U, g) est un exemple³ de *variété Riemannienne*.

3. Plus généralement, une variété Riemannienne de dimension n est une variété différentiable de dimension n munie de paramétrisation (U_i, f_i) , avec $U_i \subset \mathbf{R}^n$ munies de métriques Riemanniennes g_i , telles que les changements de paramétrage $\phi_{i,j} = f_j^{-1} \circ f_i$ sont lisses et vérifient $(d\phi_{i,j})^* g_j = g_i$ en chaque point.



Exemple 3.1.2.3. La paramétrisation de $\mathbf{S}^2$ en *coordonnées sphériques* est définie par $f:]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbf{S}^2$ tel que $f(\theta, \psi) = (\cos(\theta) \cos(\psi), \sin(\theta) \cos(\psi), \sin(\psi))$. On appelle θ la *longitude* et ψ la *latitude*. Les courbes $\theta \mapsto (\theta, \psi_0)$ représentent les *parallèles* et $\psi \mapsto (\theta_0, \psi)$ les *méridiens*. L'équateur correspondant à $\psi = 0$.



On a

$$J_{(\theta, \psi)} f = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\theta) \sin(\psi) \\ 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} = (\partial_\theta f \ \partial_\psi f) \text{ et } M(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos^2(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.1.2.4. Calculer l'expression de la première forme fondamentale d'un graphe

$$\Sigma = \{(u, v, h(u, v)); (u, v) \in U \subset \mathbf{R}^2\}$$

paramétrisé par $f(u, v) = (u, v, h(u, v))$.

Lemme 3.1.2.5 (CHANGEMENT DE PARAMÉTRISATION). Soient (U, f) et $(\tilde{U}, \tilde{f})$ deux paramétrisations de Σ telles que $\tilde{f} = f \circ \phi$ où ϕ est différentiable et soit e une base de $\mathbf{R}^2$. On a alors

$$M_{\tilde{f}, e}(x) = {}^t J_x \phi \cdot M_{f, e}(\phi(x)) \cdot J_x \phi.$$

Démonstration. Puisque $J_x(f \circ \phi) = J_{\phi(x)} f \cdot J_x \phi$, on a

$$\begin{aligned} M_{\tilde{f}, e}(x) &= {}^t J_x \tilde{f} \cdot J_x \tilde{f} = {}^t (J_{\phi(x)} f \cdot J_x \phi) \cdot (J_{\phi(x)} f \cdot J_x \phi) \\ &= {}^t J_x \phi \cdot {}^t J_{\phi(x)} f \cdot J_{\phi(x)} f \cdot J_x \phi = {}^t J_x \phi \cdot M_{f, e}(\phi(x)) \cdot J_x \phi. \end{aligned}$$

□

On pourra toujours poser $\phi := f^{-1} \circ \tilde{f}$ et la supposer différentiable car :

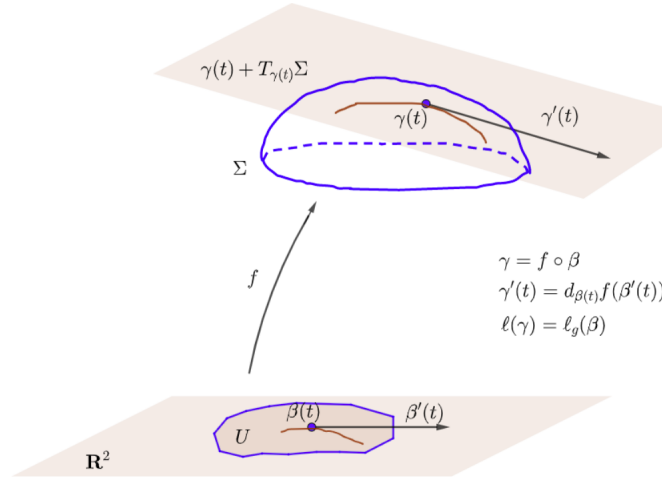
Lemme 3.1.2.6. Si (U, f) et $(\tilde{U}, \tilde{f})$ sont deux paramétrisations de Σ telles $f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U}) \neq \emptyset$, alors $\phi := f^{-1} \circ \tilde{f}: \tilde{U} \cap f^{-1}(U) \rightarrow U \cap \tilde{f}(\tilde{U})$ est un difféomorphisme.

Démonstration. D'une part, ϕ est un homéomorphisme comme composée d'homéomorphismes. Démontrons la différentiabilité de ϕ , celle de ϕ^{-1} s'obtenant par symétrie. Par redressement des immersions 2.2.0.2, il existe un difféomorphisme ψ entre ouverts de $\mathbf{R}^3$ tel que localement $\psi \circ f(x) = (x, 0) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. Ainsi, $\text{pr}_1 \circ \psi \circ f(x) = x$ et $f^{-1} = (\text{pr}_1 \circ \psi)|_\Sigma$ localement. On a alors localement que $f^{-1} \circ \tilde{f} = \text{pr}_1 \circ \psi \circ \tilde{f}$ est une composée d'applications différentiables donc est différentiable. En restreignant U et $\tilde{U}$ on peut supposer que $f(U) = \tilde{f}(\tilde{U})$. □

3.1.3 Longueur, distance intrinsèque, angles

Longueur : La longueur de $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ lisse par morceaux est sa longueur usuelle dans $\mathbf{R}^3$, soit $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. On peut la calculer via la paramétrisation (U, f) (on dit travailler « dans les coordonnées (U, f) ») en termes de $\beta := f^{-1} \circ \gamma: [a, b] \rightarrow U$. En écrivant $\gamma'(t) = d_{\beta(t)} f \cdot \beta'(t)$, il vient

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\langle d_{\beta(t)} f \cdot \beta'(t), d_{\beta(t)} f \cdot \beta'(t) \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{\beta(t)}(\beta'(t), \beta'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{[\beta'(t)]_e \cdot M(\beta(t)) \cdot [\beta'(t)]_e} dt. \end{aligned}$$



Distance intrinsèque : L'infimum des longueurs sur Σ permet de définir une distance, la *distance intrinsèque*.

Définition 3.1.3.1 (DISTANCE INTRINSÈQUE). Soit $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ une surface connexe. Étant donné $p, q \in \Sigma$, on définit $d_\Sigma(p, q) := \inf\{\ell(\gamma); \gamma \text{ courbe sur } \Sigma \text{ joignant } p \text{ à } q\}$. On appelle d_Σ la *distance intrinsèque* de Σ . La *distance extrinsèque* est définie par $d(p, q) = \|p - q\|$.

Clairement, d_Σ est symétrique, satisfait l'inégalité triangulaire et $d_\Sigma(p, q) \geq d(p, q)$. En particulier $p \neq q \Rightarrow d_\Sigma(p, q) > 0$ donc d_Σ est bien une distance. Quelques questions naturelles peuvent se poser :

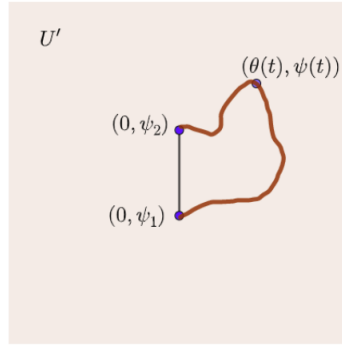
- Calculer $d_\Sigma(p, q)$.
- Existe-t-il un plus court chemin dans Σ de p à q , i.e. de longueur $d_\Sigma(p, q)$?
- Quand a-t-on unicité de ce chemin ?

Définition 3.1.3.2 (GÉODÉSIQUE I : COURBE LOCALEMENT MINIMISANTE). Un arc (I, c) sur Σ paramétré à vitesse constante est une *géodésique* si tout $t \in I$ admet un voisinage $J \subset I$ tel que $\ell(c|_{[s, s']}) = d_\Sigma(c(s), c(s'))$ pour tout $s, s' \in J$.

On prouve en section 3.3 l'existence et l'unicité locale des géodésiques. Voyons un exemple de travail dans les coordonnées (U, f) pour l'étude des géodésiques de $\mathbf{S}^2$.

Lemme 3.1.3.3 (LES GÉODÉSQUES DE $\mathbf{S}^2$ SONT LES GRANDS CERCLES). Les géodésiques de $\mathbf{S}^2$ sont les arcs de grand cercle, i.e. l'intersection de $\mathbf{S}^2$ avec un plan vectoriel et $d_{\mathbf{S}^2}(p, q) = \angle(p, q)$ l'angle des vecteurs $p, q \in \mathbf{R}^3$.

Démonstration. L'argument pour montrer qu'une géodésique est un arc de grand cercle est local, il suffit de considérer des points proches. On travaille dans les coordonnées sphériques (U, f) définie dans l'exemple 3.1.2.3. Quitte à changer de repère, ou appliquer une isométrie, on étudie deux points $p = f(0, \psi_1)$ et $q = f(0, \psi_2)$ sur un méridien et on suppose $\psi_1, \psi_2 \in [-\pi/16, \pi/16]$. Montrons que l'arc de méridien $c(t) = f(0, \psi_1 + t(\psi_2 - \psi_1))$ avec $t \in [0, 1]$, est minimisant et que c'est l'unique courbe minimisante paramétrée à vitesse constante sur $[0, 1]$. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ joignant p à q sur Σ , paramétrée à vitesse constante. Supposons d'abord $\gamma \subset f(U')$, avec $U' =]-\pi/4, \pi/4[\times]-\pi/4, \pi/4[\subset U$ et écrivons $\beta(t) = f^{-1} \circ \gamma(t) = (\theta(t), \psi(t)): [a, b] \rightarrow U'$, joignant $(0, \psi_1)$ à $(0, \psi_2)$.



En utilisant 3.1.3 et les calculs faits dans l'exemple 3.1.2.3 :

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(\theta', \psi') \begin{pmatrix} \cos^2(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta' \\ \psi' \end{pmatrix}} dt = \int_0^1 \sqrt{\cos^2(\psi) \theta'^2 + \psi'^2} dt \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{\psi'^2} dt = \int_0^1 |\psi'| dt \geq \left| \int_0^1 \psi' dt \right| = |\psi_2 - \psi_1| = \ell(c). \end{aligned}$$

Ceci montre que l'arc de méridien est minimisant parmi les courbes contenues dans $f(U')$. La première inégalité est stricte si $\theta' \neq 0$. Si γ est minimisante, on a donc $\theta' = 0$, donc $\theta = 0$, donc $\gamma = c$. Si γ sort de $f(U')$, soit $t_1 \in]0, 1]$ le premier temps où $\gamma(t_1)$ est au bord du domaine. Écrivons $\gamma(t) = f(\beta(t))$ sur $[0, t_1]$. Si $\beta(t_1) = (\theta(t_1), \pm\pi/4)$, le calcul précédent montre que $\ell(\gamma) \geq |\pm\pi/4 - \psi_1| \geq \pi/4 - \pi/16 \geq \pi/8 > \ell(c)$. Sinon, $\beta(t_1) = (\pm\pi/4, \psi(t_1))$ et en utilisant $\cos(\psi) \geq 1/2$ sur $[0, t_1]$ (car $|\psi| \leq \pi/4 \leq \pi/3$) on obtient de la deuxième égalité que $\ell(\gamma) \geq 1/2 \times \int_a^{t_1} |\theta'| dt \geq 1/2 \times \pi/4 = \pi/8 > \ell(c)$. $\square$

Remarque 3.1.3.4. On appelle *coordonnées géodésiques* une paramétrisation (U, f) dont l'expression de la première forme fondamentale est

$$M_f(u, v) = \begin{pmatrix} J^2(u, v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_f(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{avec } J > 0.$$

La démonstration du lemme 3.1.3.3 prouve que $v \mapsto f(u_0, v)$, resp. $u \mapsto f(u, v_0)$, sont des géodésiques de Σ et sont les uniques courbes minimisantes dans $f(U)$. On démontre en section 3.3 l'existence de coordonnées géodésiques sur toute surface.

Angles : On rappelle que l'angle de deux vecteurs $X, Y \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ est $\angle(X, Y) = \arccos\left(\frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|}\right)$. Si $X, Y \in T_{f(a)}\Sigma$ sont les images de $V, W \in \mathbf{R}^2$ par $d_a f$, on a alors $\langle X, Y \rangle = \langle d_a f(V), d_a f(W) \rangle = g_a(V, W)$, donc

$$\angle(X, Y) = \arccos\left(\frac{g_a(V, W)}{g_a(V, V)^{1/2} g_a(W, W)^{1/2}}\right) = \arccos\left(\frac{{}^t V M(a) W}{\sqrt{{}^t V M(a) V} \sqrt{{}^t W M(a) W}}\right). \quad (3.2)$$

Coordonnées conformes ou isothermes : On vérifie facilement que deux produits scalaires définissent les mêmes angles si et seulement si ils sont proportionnels. Il s'ensuit que les angles mesurés dans (U, f) par (3.2) sont les angles de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si $M_f(\cdot) = J^2(\cdot) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $J(\cdot) > 0$. De telles coordonnées sont dites *conformes* ou *isothermes*. On comprend l'intérêt pratique d'une telle paramétrisation. Elles existent également sur toute surface.

Coordonnées isométriques ? On peut se demander s'il existe des coordonnées (U, f) dans lesquelles les longueurs mesurées sont celles de $\mathbf{R}^2$. Cela revient à dire que (Σ, d_Σ) est localement isométrique à $\mathbf{R}^2$ et aussi que $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le Theorema Egregium (« théorème excellent ») de Gauss, prouvé en section 3.4, donne une obstruction à cela, ce qui impliquera par exemple que la sphère n'est pas localement isométrique à $\mathbf{R}^2$.

3.1.4 Aires

Soit $D \subset \Sigma$ un domaine relativement compact tel que $\overline{f^{-1}(D)} \subset U$.

Définition 3.1.4.1 (AIRE). On appelle *aire* de D l'intégrale

$$A(D) = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(M_f(u, v))} du dv. \quad (3.3)$$

Il ne saute pas aux yeux que (3.3) mesure bien une aire, on le justifie dans la proposition 3.1.4.2 ci-dessous. On vérifie d'abord que (3.3) ne dépend pas de la paramétrisation. Si $\tilde{f} = f \circ \phi$, on a en utilisant le lemme 3.1.3.3 que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det(M_{\tilde{f}})} du dv &= \int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det({}^t J\phi \cdot M_f \circ \phi \cdot J\phi)} du dv \\ &= \int_{\phi^{-1} \circ f^{-1}(D)} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(M_f \circ \phi)} du dv \\ &= \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(M_f)} du dv \end{aligned}$$

d'après la formule de changement de variable. On justifie (3.3) en calculant le volume d'un *épaississement normal* V_t de D , défini comme suit : on pose $\Omega = f^{-1}(D)$, $\nu = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}$ sur Ω et pour $t \geq 0$, $V_t := F(\Omega \times [-t, t])$ où $F(x, t) = f(x) + t\nu(x)$ sur $U \times \mathbf{R}$. On peut estimer (3.3) satisfaisante si elle vérifie

$$\text{vol}(V_t) := \int_{V_t} dx_1 dx_2 dx_3 = 2tA(D) + o(t)$$

ou de manière équivalente si $A(D) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(V_t)}{2t}$. C'est bien le cas :

Proposition 3.1.4.2. On a

$$\text{vol}(V_t) = 2t \int_{\Omega} \sqrt{\det(M_f(u, v))} du dv + Ct^3.$$

Démonstration. Démontrons d'abord que $F: \Omega \times [-t, t] \rightarrow V_t$ est un difféomorphisme pour $t > 0$ assez petit. En $(x, t) = (x_1, x_2, t) \in \bar{\Omega} \times [-t, t]$ on a

$$J_{(x,t)}F = (J_x f + tJ_x \nu \quad \nu) = (\partial_1 f + t\partial_1 \nu \quad \partial_2 f + t\partial_2 \nu \quad \nu). \quad (3.4)$$

En particulier $J_{(x,0)}F = (J_x f \quad \nu)$ est inversible pour tout $x \in \bar{\Omega}$. Par inversion locale et compacité de $\bar{\Omega}$, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i \in \llbracket 1, j \rrbracket}$ de $\bar{\Omega}$ et $T > 0$ tel que la restriction de F sur $\bar{\Omega} \times [-t, t]$ pour $t > 0$ assez petit. Sinon, il existe deux suites $x_k, x'_k \in \Omega$ et $t_k, t'_k \rightarrow 0$ telles que $F(x_k, t_k) = F(x'_k, t'_k)$ et $(x_k, t_k) \neq (x'_k, t'_k)$. Quitte à extraire des sous-suites on peut supposer $x_k, x'_k \rightarrow x_\infty, x'_\infty \in \bar{\Omega}$ quand $k \rightarrow \infty$. Si $x_\infty = x'_\infty$, alors il existe un U_i contenant $x_\infty = x'_\infty$ et donc (x_k, t_k) et (x'_k, t'_k) appartiennent à $U_i \times [-T, T]$ pour k assez grand. Ceci contredit l'injectivité de F sur ce domaine, donc $x_\infty \neq x'_\infty$. Mais alors, par passage à la limite dans l'égalité $F(x_k, t_k) = F(x'_k, t'_k)$, on obtient $F(x_\infty, 0) = F(x'_\infty, 0) = f(x_\infty) = f(x'_\infty)$. Ceci contredit l'injectivité de f sur U . On a donc prouvé que $F: \Omega \times [-t, t] \rightarrow V_t$ est injective et est un difféomorphisme local, c'est donc un difféomorphisme. Calculons $\det(J_{(x,t)}F)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant sur l'expression (3.4). En notant $\det(A) = |A|$ on a

$$\begin{aligned} |J_{(x,t)}F| &= |\partial_1 f \quad \partial_2 f \quad \nu| + t|\partial_1 f \quad \partial_2 \nu \quad \nu| + t|\partial_2 f \quad \partial_1 \nu \quad \nu| + t^2|\partial_1 \nu \quad \partial_2 \nu \quad \nu| \\ &= |J_{(x,0)}F| + tA_1(x) + t^2A_2(x). \end{aligned}$$

Or, $|J_{(x,0)}F| = \sqrt{\det(M_f(x))}$. En effet en utilisant $\langle \partial_i f, \nu \rangle = 0$ et (3.1), on a

$${}^t J_{(x,0)}F \cdot J_{(x,0)}F = \begin{pmatrix} {}^t J_x f \cdot J_x f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_f(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d'où l'assertion en utilisant $|{}^t AA| = |A|^2$. On calcule alors $\text{vol}(V_t)$ via la formule de changement de variable, pour $t > 0$ petit et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \text{vol}(V_t) &= \int_{V_t = F(\Omega \times [-t, t])} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega \times [-t, t]} |J_{(x,s)}F| dx ds \\ &= \int_{-t}^t \left(\int_{\Omega} |J_{(x,0)}F| + sA_1(x) + s^2A_2(x) dx \right) ds \\ &= 2t \int_{\Omega} |J_{(x,0)}F| dx + \int_{-t}^t (sB_1 + s^2B_2) ds \quad \left(B_i = \int_{\Omega} A_i(x) dx \in \mathbf{R} \right) \\ &= 2t \int_{\Omega} |M_f(x)|^{1/2} dx + Ct^3. \end{aligned}$$

□

Exercice 3.1.4.3. (1) Calculer l'aire de $\mathbf{S}^2$.

(2) En utilisant $\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z)$, démontrer que

$$A(D) = \int_{f^{-1}(D)} \|\partial_u f \wedge \partial_v f\| du dv.$$

3.2 Courbures

On va définir des courbures en mesurant de combien « tourne » un vecteur unitaire normal à Σ lorsqu'on le déplace. Il nous faut une notion de normale unitaire « différentiable » sur Σ .

3.2.1 Application de Gauss

Définition 3.2.1.1 (APPLICATION DE GAUSS). Une application $N: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ est une *application de Gauss* si :

- (i) pour tout $p \in \Sigma$, on a $N(p) \perp T_p \Sigma$ et $\|N(p)\| = 1$;
- (ii) pour toute paramétrisation (U, f) de Σ , l'application $N \circ f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ est différentiable.

La seconde condition exprime la différentiabilité de la normale unitaire via des paramétrisations. En particulier, N est continue sur Σ .

Observons qu'il suffit que (ii) soit satisfaite pour une famille (U_i, f_i) de paramétrisations dont les ouverts $f(U_i)$ recouvrent Σ . En effet, pour une paramétrisation (U, f) quelconque, les composées $\phi_i := f_i^{-1} \circ f$ définies sur les ouverts adéquats sont différentiables (cf. lemme 3.1.2.6) et $N \circ f = N \circ f_i \circ \phi_i$ est donc différentiable.

L'existence d'une application de Gauss n'est pas garantie sur Σ quelconque. Lorsque $\Sigma = f(U)$, il en existe au moins une : $N_f := \nu_f \circ f^{-1}$ où

$$\nu_f(x) := \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}.$$

En effet, $\nu_f(x)$ est unitaire, normal à $T_{f(x)}\Sigma$ et $N_f \circ f = \nu_f$ est différentiable. Si de plus Σ est connexe, il existe exactement deux applications de Gauss : $\pm N_f$. En effet, soit N une application de Gauss et $p = f(x) \in \Sigma$ alors $N(p) \in \mathbf{R} \nu_f(x)$ puisque $N(p) \perp T_p \Sigma$, de même que $\nu_f(x)$ et comme $\|N(p)\| = 1$ on a $N(p) = \pm \nu_f(x)$; par continuité de $x \mapsto \langle N \circ f(x), \nu_f(x) \rangle \in \{-1, 1\}$ et connexité de U , $\langle N \circ f, \nu_f \rangle$ est constant sur U , donc $N \circ f = \nu_f$ ou $N \circ f = -\nu_f$.

Lemme 3.2.1.2 (CHANGEMENT D'ORIENTATION). Si $(\tilde{U}, \tilde{f})$ est une paramétrisation de Σ telle que $\tilde{f} = f \circ \phi$, alors

$$\nu_{\tilde{f}}(x) = \text{sign}(\det(J_x \phi)) \nu_f(\phi(x)).$$

Par conséquent, $N_f = \text{sign}(\det(J\phi)) N_{\tilde{f}}$. On dit que $(\tilde{U}, \tilde{f})$ et (U, f) définissent la même orientation sur Σ si $\det(J\phi) > 0$.

Démonstration. Notant $\phi(u', v') = (u, v)$ on a $J_x \phi = \begin{pmatrix} \partial_{u'} u & \partial_{v'} u \\ \partial_{u'} v & \partial_{v'} v \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Puisque $J_{(u', v')} \tilde{f} = J_{(u, v)} f \cdot J_{(u', v')} \phi$ on a $(\partial_{u'} \tilde{f} \ \partial_{v'} \tilde{f}) = (\partial_u f \ \partial_v f) \begin{pmatrix} \partial_{u'} u & \partial_{v'} u \\ \partial_{u'} v & \partial_{v'} v \end{pmatrix}$, d'où en x ,

$$\begin{aligned} \partial_{u'} \tilde{f}(x) &= (a \partial_u f + c \partial_v f)(\phi(x)) \\ \partial_{v'} \tilde{f}(x) &= (b \partial_u f + d \partial_v f)(\phi(x)). \end{aligned}$$

En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel, on obtient

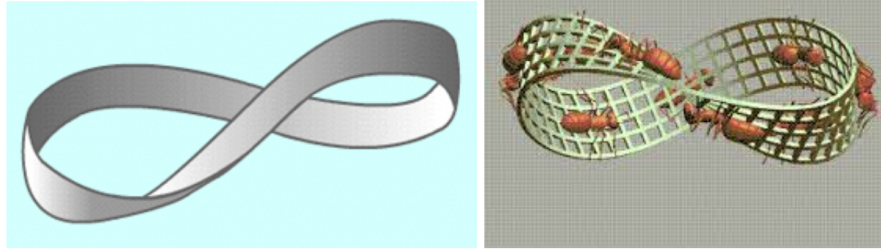
$$\partial_{u'} \tilde{f} \wedge \partial_{v'} \tilde{f} = (ad - bc)(\partial_u f \wedge \partial_v f) \circ \phi.$$

□

En particulier, si $\tilde{f}(u, v) = f(v, u)$, on a $N_{\tilde{f}} = -N_f$.

Exemple 3.2.1.3. Sur la sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$, $N(x) = x$ et $N(x) = -x$ sont les deux applications de Gauss, définies globalement. Sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, l'application $N(x, t) = (x, 0)$ est de Gauss, globale également.

Surface non orientable (Culture générale) : Lorsqu'une surface Σ nécessite plusieurs paramétrisations (U_i, f_i) pour la décrire, l'existence d'une application de Gauss sur Σ équivaut à pouvoir choisir les f_i pour $N_{f_i} = N_{f_j}$ sur les intersections $f_i(U_i) \cap f_j(U_j)$. Au vu du lemme 3.2.1.2 cela équivaut à la positivité de tous les déterminants $\det(J(f_j^{-1} \circ f_i))$. Une surface recouverte par de telles paramétrisations (U_i, f_i) est dite *orientable*. Choisir une telle famille (U_i, f_i) , ou une application de Gauss, définit une *orientation* de la surface. Il existe des surfaces non orientables ! La plus fameuse est le *ruban de Moëbius* :



Cette surface n'est pas orientable car elle n'a pas d'application de Gauss. En effet, on peut trouver un chemin continu de vecteurs unitaires normal à Σ parcourant le ruban et revenant à son point de départ « à l'opposé » : formellement il existe $c: [0, 1] \rightarrow \Sigma \times \mathbf{S}^2$ continue, $c(t) = (p(t), n(t))$ telle que $p(0) = p(1)$, $n(t) \perp T_{p(t)}\Sigma$ et $n(0) = -n(1)$. S'il existait une application de Gauss N sur Σ , la fonction $t \mapsto \langle N(p(t)), n(t) \rangle \in \{-1, 1\}$ serait continue donc constante. C'est impossible car $N(p(0)) = N(p(1))$ mais $n(0) = -n(1)$.

Comme on s'intéresse à la géométrie *locale* des surfaces, on pourra supposer que $\Sigma = f(U)$ et donc qu'il existe une application de Gauss.

3.2.2 Endomorphisme de Weingarten, seconde forme fondamentale

Maintenant on mesure de combien « tourne » N lorsqu'on le déplace sur Σ . Formellement :

Définition 3.2.2.1 (DIFFÉRENTIELLE DE L'APPLICATION DE GAUSS). La *différentielle en $p \in \Sigma$ de l'application de Gauss* est l'application $d_p N: T_p \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$d_p N \cdot X = (N \circ c)'(0) \quad (3.5)$$

où c est une courbe sur Σ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$.

Vérifions que (3.5) ne dépend pas de c : avec $N \circ c(t) = \nu \circ f^{-1} \circ c$ et $x = f^{-1}(p)$ on voit que

$$(N \circ c)'(0) = d_x \nu (d_x f)^{-1} c'(0)$$

dépend seulement de $c'(0) = X$, pas de c . De plus, on a obtenu l'identité

$$d_p N = d_x \nu (d_x f)^{-1} \quad (3.6)$$

prouvant que $d_p N$ est linéaire. On a même mieux :

Proposition 3.2.2.2 (LA DIFFÉRENTIELLE $d_p N$ EST SYMÉTRIQUE). La différentielle $d_p N$ de l'application de Gauss stabilise $T_p \Sigma$. De plus, $d_p N: T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ est un endomorphisme symétrique, au sens que pour tous $X, Y \in T_p \Sigma$,

$$I_p(d_p N \cdot X, Y) = I_p(X, d_p N \cdot Y).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $d_p N(T_p \Sigma) \subset T_p \Sigma$. Soit $X \in T_p \Sigma$ et c une courbe sur Σ telle que $c'(0) = X$. Notant $N(t) = N \circ c(t)$ et dérivant l'égalité $\langle N(t), N(t) \rangle = 1$, il vient que $\langle N'(0), N(0) \rangle = 0$ d'où $N'(0)$ est orthogonal à $N(0)$, donc $N'(0) \in T_p \Sigma$. Il reste à voir la symétrie. Il suffit de la vérifier dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ de $T_p \Sigma$, c'est-à-dire vérifier que

$$I_p(d_p N \cdot \partial_u f, \partial_v f) = I_p(\partial_u f, d_p N \cdot \partial_v f).$$

Ici, (u, v) sont les coordonnées dans une base $e = (e_1, e_2)$ de $\mathbf{R}^2$. Notons que

$$d_p N \cdot \partial_u f = d_x \nu \cdot (d_x f)^{-1} \partial_u f = d_x \nu (e_1) = \partial_u \nu \quad (3.7)$$

$$d_p N \cdot \partial_v f = \partial_v \nu \quad (3.8)$$

donc

$$I_p(d_p N \cdot \partial_u f, \partial_v f) = \langle \partial_u \nu, \partial_v f \rangle \quad (3.9)$$

il faut donc montrer que

$$\langle \partial_u \nu, \partial_v f \rangle = \langle \partial_u f, \partial_v \nu \rangle. \quad (3.10)$$

Puisque $\nu(x) \perp T_{f(x)}\Sigma$ pour tout $x \in U$, on a $\langle \nu, \partial_v f \rangle = 0 = \langle \nu, \partial_u f \rangle$ sur U . En dérivant et par bilinéarité du produit scalaire, on déduit

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle \nu, \partial_v f \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \nu, \partial_v f \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle \quad (3.11)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle \nu, \partial_u f \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \nu, \partial_u f \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \right\rangle \quad (3.12)$$

Or $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$ d'après le théorème de Schwarz, donc (3.11) (3.12) impliquent que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u} \nu, \partial_v f \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \nu, \partial_u f \right\rangle \quad (3.13)$$

d'où (3.10) par symétrie du produit scalaire. $\square$

Définition 3.2.2.3 (ENDOMORPHISME DE WEINGARTEN, SECONDE FORME). On appelle *endomorphisme de Weingarten* l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_p N : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma.$$

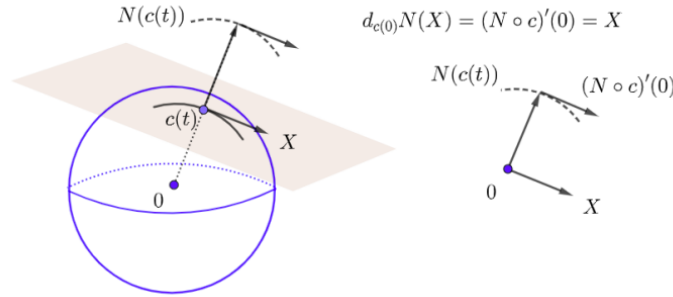
On appelle *seconde forme fondamentale* la forme bilinéaire symétrique sur $T_p \Sigma$:

$$\Pi_p(X, Y) = I_p(W_p X, Y) = I_p(-d_p N \cdot X, Y).$$

L'endomorphisme W_p dépend de l'orientation choisie pour N : si N est remplacé par $-N$, alors W_p est remplacé par $-W_p$ et de même, Π_p remplacé par $-\Pi_p$. Via une paramétrisation, on peut calculer la matrice d'endomorphisme de W_p dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ de $T_p \Sigma$ grâce aux relations (3.7) et (3.8) en exprimant $\partial_u \nu$ et $\partial_v \nu$ dans cette base. Cette matrice est symétrique si la base est orthonormée mais pas nécessairement sinon. La seconde forme fondamentale est symétrique, mais pas nécessairement définie et positive. Sa matrice de forme bilinéaire est bien entendue symétrique dans toute base.

Exemple 3.2.2.4. Sur $\mathbf{S}^2$ munie de l'application de Gauss $N(x) = x$, on a $d_x N = \text{Id}_{T_x \mathbf{S}^2}$ donc $W_x = -\text{Id}_{T_x \mathbf{S}^2}$. En effet

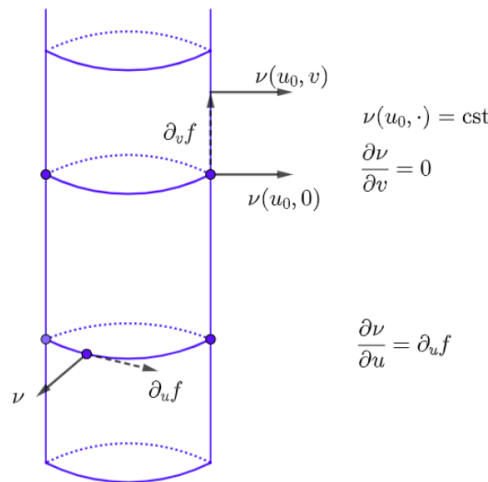
$$d_x N \cdot c'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c(t) = c'(0).$$



Exemple 3.2.2.5. Sur le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ muni de $N(x, t) = (x, 0)$ on trouve $d_{(x,t)} N(X, T) = (X, 0)$ pour tout $X \in T_x \mathbf{S}^1$ et $T \in \mathbf{R}$. En paramétrisant le cylindre par $f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, on a

$$Jf = (\partial_u f \ \partial_v f) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \nu = (\cos(u), \sin(u), 0) \quad J\nu = (\partial_u \nu \ \partial_v \nu) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi $d_p N \cdot \partial_u f = \partial_u \nu = \partial_u f$ et $d_p N \cdot \partial_v f = \partial_v \nu = 0$, donc la matrice de $W_p = -d_p N$ dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Proposition 3.2.2.6 (LA SECONDE FORME MESURE L'ACCELERATION NORMALE). Soit c une courbe lisse tracée sur Σ , alors en $p = c(t)$

$$\Pi_c(c', c') = \langle c'', N \circ c \rangle.$$

Démonstration. Puisque c est tracée sur Σ , on a $\langle c', N \circ c \rangle = 0$ identiquement, d'où en dérivant $\langle c'', N \circ c \rangle + \langle c', d_c N \cdot c' \rangle = 0$. $\square$

En décomposant l'accélération c'' en une partie $c''_T \in T_c \Sigma$ tangente à Σ et une partie normale colinéaire à N on a

$$c'' = c''_T + \langle c'', N \rangle N = c''_T + \Pi_c(c', c') N \quad (3.14)$$

donc $\Pi_{c(t)}(c'(t), c'(t))$ est la composante normale de $c''(t)$. Étant donné $X \in T_p \Sigma$, toute courbe de Σ vérifiant $c'(t) = X$ aura la même accélération normale $\Pi_p(X, X)$ en p . C'est une contrainte d'accélération normale que Σ impose à ses courbes. Si $\|c'\| = 1$, on a $\|c''\| = K$ donc (3.14) et Pythagore disent que $K(c(s)) \geq |\Pi_{c(s)}(c'(s), c'(s))|$. La seconde forme fondamentale mesure donc un minimum de courbure que la surface impose à ses courbes. Il arrive qu'on note $K_N = \Pi_p(c', c')$ la *courbure normale* de c en p . Une question naturelle est de comprendre les courbes de Σ "les moins courbées", c'est-à-dire vérifiant $K(c(s)) = |\Pi_{c(s)}(c'(s), c'(s))|$ ou de manière équivalente $c''_T = 0$, i.e. $c'' \perp T_c \Sigma$. Ce sont les courbes "à accélération nulle dans Σ " qui sont l'analogue dans Σ des droites de $\mathbf{R}^n$. On prouve dans le théorème 3.3.2.7 que ce sont exactement les géodésiques!

Que dit le signe de $\Pi_p(X, X)$? Le signe de $\Pi_p(c', c')$ renseigne sur la position de c par rapport au plan tangent. En effet un développement limité et (3.14) donne en $p = c(0)$, en notant $X = c'(0)$:

$$c(t) = p + tc'(0) + \frac{t^2}{2} c''_T(0) + \frac{t^2}{2} \Pi_p(X, X) N(p) + o(t^2).$$

Les points $p + tc'(0) + \frac{t^2}{2} c''_T(0)$ restent dans le plan tangent affine $p + T_p \Sigma$. Si $\Pi_p(X, X) \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction à $] -\varepsilon, \varepsilon[$ de c reste dans le demi-espace contenant $p + N(p)$ si $\Pi_p(X, X) > 0$, resp. $p - N(p)$ si $\Pi_p(X, X) < 0$. Si $\Pi_p(X, X) = 0$, tout peut arriver.

Quantités scalaire issues de Π_p , les courbures : On associe à l'endomorphisme $W_p = -d_p N$ plusieurs courbures de type scalaire. Rappelons que W_p est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(T_p \Sigma, I_p)$. Par le théorème spectral, il est donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Définition 3.2.2.7 (COURBURES). (i) Les valeurs propres de W_p sont appelées les *courbures principales* et sont notées $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$. Les directions propres sont appelées *directions principales*.

(ii) Le déterminant $\kappa(p) = \det(W_p) = \kappa_1 \kappa_2$ est appelée *courbure de Gauss*.

(iii) La moyenne $H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p) = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2)$ est appelée *courbure moyenne*.

Remarque 3.2.2.8. (1) On peut choisir les directions propres orthogonales.

(2) Supposons $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Un peu d'algèbre bilinéaire montre (exercice) que

$$\kappa_1 = \min\{\Pi_p(X, X); (X \in T_p \Sigma) \|X\| = 1\} \quad (3.15)$$

$$\kappa_2 = \max\{\Pi_p(X, X); (X \in T_p \Sigma) \|X\| = 1\}. \quad (3.16)$$

(3) Si N est remplacé par $-N$, l'endomorphisme W_p est multiplié par -1 , ainsi que ses valeurs propres κ_1, κ_2 , mais pas leur produit κ qui ne dépend donc pas de l'orientation de Σ . Le Theorema Egregium de Gauss (« théorème excellent ») dit que κ ne dépend même pas de Π_p mais uniquement de d_Σ , autrement dit de la géométrie

interne à la surface mais pas de son plongement dans $\mathbf{R}^3$.

(4) Les surfaces telles que $H = 0$ sont appelées *surfaces minimales*, elles sont les points critiques de la fonctionnelle d'aire : elles vérifient $\frac{d}{dt}|_{t=0}A(\Sigma + t\eta N) = 0$ pour toute fonction $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ à support compact.

Exemple 3.2.2.9. La sphère unité $\mathbf{S}^2$ est de courbures principales $\kappa_1 = \kappa_2$ égales en tout point (à ± 1), donc de courbure de Gauss $+1$. Le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ est de courbures principales 0 et ± 1 , donc de courbure de Gauss nulle.

3.2.3 Expression en coordonnées locales

Notons $[I_p]$, $[\Pi_p]$, et $[W_p]$ les matrices dans $M_2(\mathbf{R})$ représentant respectivement la première forme fondamentale, la deuxième forme fondamentale et l'endomorphisme de Weingarten dans une même base $\mathcal{B}$ de $T_p\Sigma$. On peut prendre par exemple $\mathcal{B} = (\partial_u f, \partial_v f)$. Les matrices $[I_p]$ et $[\Pi_p]$ sont toujours symétriques, car matrices de forme bilinéaire symétrique, mais la matrice d'endomorphisme $[W_p]$ ne l'est pas nécessairement. Ces matrices vérifient la relation suivante :

$$[\Pi_p] = [I_p][W_p]. \quad (3.17)$$

En effet, notons $X, Y \in \mathbf{R}^2$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de vecteurs $x, y \in T_p\Sigma$, alors

$$\Pi_p(x, y) = {}^t X [\Pi_p] Y = I_p(W_p x, y) = {}^t ([W_p x]) [I_p] Y = {}^t ([W_p] X) [I_p] Y = {}^t X {}^t [W_p] [I_p] Y$$

pour tous $X, Y \in \mathbf{R}^2$, d'où $[\Pi_p] = {}^t [W_p] [I_p]$ en identifiant les matrices ci-dessus. On obtient (3.17) en transposant. On peut calculer $[\Pi_p]$ pour $\mathcal{B} = (\partial_u f, \partial_v f)$ via les formules ci-dessous. Notons $(u_1, u_2) = (u, v)$. Comme en (3.9), on a pour $i, j \in \{1, 2\}$

$$\Pi_p(\partial_{u_i} f, \partial_{u_j} f) = \langle -d_p N \cdot \partial_{u_i} f, \partial_{u_j} f \rangle = \langle -\partial_{u_i} \nu, \partial_{u_j} f \rangle$$

or comme (3.11), on a

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \nu, \partial_{u_j} f \right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial}{\partial u_j} f \right) \right\rangle$$

d'où l'on déduit

$$\Pi_p(\partial_{u_i} f, \partial_{u_j} f) = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = \frac{1}{\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|} \det \left(\partial_1 f, \partial_2 f, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right) \quad (3.18)$$

en utilisant $\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z)$ dans l'égalité de droite pour faire disparaître $\nu = \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|}$.

Si $[\Pi_p] = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ on a donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det \left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) \\ B &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det \left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) \\ C &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det \left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

Si $[I_p] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, sa matrice inverse est

$$[I_p]^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $[W_p] = [I_p]^{-1}[\Pi_p] = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} AG - FB & GB - FC \\ -FA + EB & -FB + EC \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et :

Proposition 3.2.3.1 (COURBURES EN COORDONNÉES). On a

$$\begin{aligned} \kappa &= \det(W) = ad - bc = \frac{\det[\Pi_p]}{\det[I_p]} = \frac{AC - B^2}{EG - F^2} \\ H &= \frac{1}{2} \text{Tr}(W) = \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2(EG - F^2)}(AG - 2BF + CE). \end{aligned}$$

Le signe de la courbure de Gauss renseigne sur la position de Σ par rapport au plan (affine) tangent :

Proposition 3.2.3.2 (POSITION DE Σ PAR RAPPORT AU PLAN TANGENT). (i) Supposons que $\Sigma = \{(u, v, h(u, v)); (u, v) \in \Omega\}$, avec $0 \in \Sigma$ et $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$. On a alors

$$\Pi_0 = D^2h(0)$$

autrement dit, la seconde forme fondamentale est la Hessienne de la fonction hauteur.

(ii) Soit $p \in \Sigma$ tel que $\kappa(p) > 0$, alors il existe un voisinage U de p tel que $(\Sigma \cap U) \cap (p + T_p\Sigma) = \{p\}$. Si $\kappa(p) < 0$, pour tout voisinage U de p il existe des points de $U \cap \Sigma$ de part et d'autre de $p + T_p\Sigma$.

Démonstration. (i) On peut paramétrer Σ par $f(u, v) = (u, v, h(u, v))$. Puisque $\nu(0) = (0, 0, 1)$, on a $\langle \nu, \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j} \rangle = \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}$, d'où d'après (3.18)

$$[\Pi_0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{pmatrix} = [D^2h(0, 0)]$$

la matrice Hessienne de h en $(0, 0)$.

(ii) Écrivons Σ au voisinage de p comme un graphe. Quitte à changer les axes de coordonnées, on peut supposer $p = 0$ et $\nu(0) = (0, 0, 1)$. On a alors une paramétrisation $f(u, v) = (u, v, h(u, v))$ comme en (i). Comme $\partial_u f = (1, 0, \partial_u h)$ et $\partial_v f = (0, 1, \partial_v h)$ on a $\partial_u f \wedge \partial_v f = (-\partial_u h, -\partial_v h, 1)$ donc

$$\nu(0) = \frac{(-\partial_u h, -\partial_v h, 1)}{\|(-\partial_u h, -\partial_v h, 1)\|}.$$

Comme $\nu(0) = (0, 0, 1)$ on en déduit que $(-\partial_u h, -\partial_v h) = (0, 0)$ en 0. Le développement limité de h donne alors

$$h(u, v) = p + (u, v)[D^2h(0, 0)] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(u^2 + v^2).$$

Si $\kappa(p) > 0$, $D^2h(0, 0)$ est définie positive ou définie négative ; si $\kappa(p) < 0$, elle a deux valeurs propres de signe opposé, d'où la position de Σ par rapport au plan tangent. $\square$

3.3 Géodésiques

3.3.1 Existence et unicité locale

On donne une définition alternative des géodésiques. L'équivalence avec 3.1.3.2 est prouvée en 3.3.2.7.

Définition 3.3.1.1 (GÉODÉSIQUE II : ACCÉLÉRATION TANGENTIELLE NULLE). Un arc paramétré (I, c) de Σ est une *géodésique* si $c'' \perp T_{c(t)}\Sigma$ sur I .

Une géodésique est paramétrée à vitesse constante : $\frac{d}{dt}\langle c', c' \rangle = 2\langle c'', c' \rangle = 0$ puisque $c'(t) \in T_{c(t)}\Sigma$ et $c''(t) \perp T_{c(t)}\Sigma$. On peut lancer une géodésique dans toute direction :

Théorème 3.3.1.2 (EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALE). Si $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$, alors il existe une unique géodésique maximale (I_X, c_X) telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$.

Il est implicite que (I_X, c_X) dépend aussi de p , c'est contenu dans le fait que $X \in T_p\Sigma$.

Démonstration. Traduisons le problème dans des coordonnées (U, f) , c'est-à-dire cherchons à caractériser sur un arc paramétré $x: I \rightarrow U$ le fait que $c = f \circ x$ soit une géodésique. On a

$$\begin{aligned} (f \circ x)'(t) &= d_{x(t)}f \cdot x'(t) \\ (f \circ x)''(t) &= D^2f(x', x') + d_{x(t)}f \cdot x''(t) \end{aligned}$$

d'où

$$(f \circ x)''(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x(t))}{\partial x_i \partial x_j} x'_i(t) x'_j(t) + \sum_k \partial_k f(x(t)) \cdot x''_k(t) \quad (3.19)$$

où on somme sur $i, j, k \in \{1, 2\}$ et on note $x = (x_1, x_2)$ et $\partial_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Écrivons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{R}^3$ dans la base $\{\partial_1 f, \partial_2 f, \nu\}$ en utilisant (3.18) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1,2} \Gamma_{i,j}^k(x) \partial_k f(x) + \Pi_{f(x)}(\partial_i f(x), \partial_j f(x)) \nu(x) \quad (3.20)$$

pour des coefficients $\Gamma_{i,j}^k: U \rightarrow \mathbf{R}$, qui sont appelés *symboles de Christoffel*. Injectant (3.20) dans (3.19), la composante tangentielle de c'' en $p = f(x(t))$ s'écrit donc

$$c''_T = \sum_k \left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(x) x'_i x'_j + x''_k \right) \partial_k f(x).$$

On en déduit que c est une géodésique si pour $k = 1$ et $k = 2$,

$$\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(x) x'_i x'_j + x''_k = 0. \quad (3.21)$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

où $F: U \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est lisse car les coefficients $\Gamma_{i,j}^k$ le sont. En effet les coefficients dans la base $(\partial_1 f, \partial_2 f)(x)$ d'une fonction lisse $V: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ telle que $V(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ (une telle fonction s'appelle *champ de vecteur* sur Σ) sont lisses car se calculent comme suit : si $V = a\partial_1 f + b\partial_2 f$ alors (exercice)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (M_f(x))^{-1} \begin{pmatrix} \langle V, \partial_1 f \rangle \\ \langle V, \partial_2 f \rangle \end{pmatrix}.$$

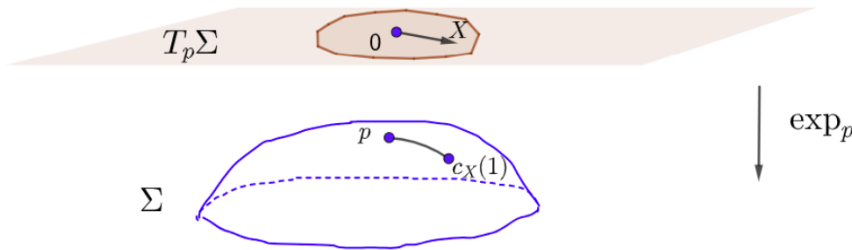
On peut donc invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour affirmer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(x) x'_i x'_j + x''_k = 0 \\ (x(0), x'(0)) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

admet, pour toute donnée initiale $(x_0, v_0) \in U \times \mathbf{R}^2$, une unique solution maximale $x_{(x_0, v_0)}$ définie sur un intervalle $I_{(x_0, v_0)}$. Il reste à appliquer cela à $(x_0, v_0) = (f^{-1}(p), (df)^{-1} \cdot X)$ puis à poser $c_X = f \circ x_{(x_0, v_0)}$ et $I_X = I_{(x_0, v_0)}$. $\square$

3.3.2 L'application exponentielle $X \mapsto c_X(1)$ et les coordonnées géodésiques

Une observation : si (I_X, c_X) est une géodésique et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $t \mapsto c_X(\lambda t)$ est une géodésique définie sur $\frac{1}{\lambda} I_X$ de vecteur vitesse λX en 0. Par unicité de Cauchy, $c_X(\lambda t) = c_{\lambda X}(t)$ et $\frac{1}{\lambda} I_X = I_{\lambda X}$. Supposons que sur $B(0, \varepsilon) \subset T_p \Sigma$, on ait $I_X \supset]-2, 2[$. On peut alors définir l'application $X \mapsto c_X(1)$, $B(0, \varepsilon) \subset T_p \Sigma \rightarrow \Sigma$. C'est l'*exponentielle basée en p* notée $\exp_p$.



On a que :

- Pour $\varepsilon > 0$ petit, c'est une paramétrisation (voir lemme 3.3.2.4) ;
- Vu sa construction à base de géodésiques, elle reflète mieux la géométrie de Σ qu'une paramétrisation quelconque : elle permet de construire des *coordonnées géodésiques* (ou *coordonnées normales*) sur Σ . (voir lemme de Gauss 3.3.2.6).

On commence par prouver l'existence.

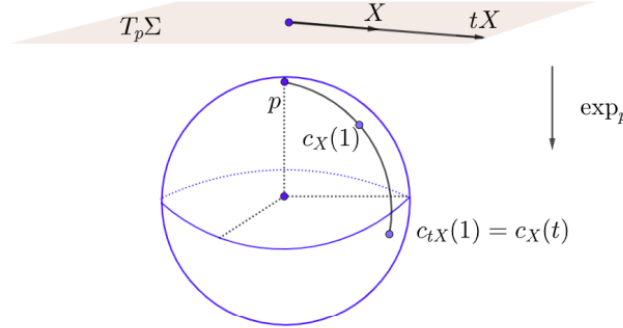
Lemme 3.3.2.1 (EXISTENCE DE L'EXPONENTIELLE). Si $p \in \Sigma$, alors il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que pour tout $X \in B(0, \varepsilon_p) \subset T_p \Sigma$ on ait $I_X \supset]-2, 2[$.

Démonstration. On reprend les notations du théorème 3.3.1.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve la dépendance continue (et même lisse) en les données initiales : tout $(x_0, v_0) \in U \times \mathbf{R}^2$ admet un voisinage $V \times W$ et $T > 0$ tel que si $(x_1, v_1) \in V \times W$ alors $I_{(x_1, v_1)} \supset]-T, T[$. On peut supposer $T < 1$. Choisissons $x_1 = x_0$ et $v_0 = v_1 = 0$. Fixons $\delta > 0$ tel que $\overline{B(0, \delta)} \subset W$, alors pour tout $v \in B(0, \delta)$ on a $I_{(x_0, v)} \supset]-T, T[$. Considérons maintenant $v \in B(0, \frac{T\delta}{2})$ et étudions $I_{(x_0, v)}$. Pour $\lambda = \frac{2}{T}$, on a $\lambda v \in B(0, \delta)$ donc $I_{(x_0, \lambda v)} \supset]-T, T[$. Mais alors $I_{(x_0, v)} = \lambda I_{(x_0, \lambda v)} \supset]-2, 2[$. On choisit $\varepsilon_p > 0$ tel que $d_{x_0} f(B(0, \frac{T\delta}{2})) \supset B(0, \varepsilon_p)$. Ceci conclut la preuve. $\square$

Définition 3.3.2.2 (APPLICATION EXPONENTIELLE). On appelle *application exponentielle basée en p* l'application $X \mapsto c_X(1)$; $B(0, \varepsilon_p) \subset T_p \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Remarque 3.3.2.3. En inspectant la preuve du lemme 3.3.2.1, on voit que $I_{(x_1, v_1)} \supset]-2, 2[$ pour tout $(x_1, v_1) \in V \times B(0, \frac{T\delta}{2})$. On pourrait donc choisir $\varepsilon > 0$ pour que $\exp_q$ soit définie sur $B(0, \varepsilon) \subset T_q\Sigma$ pour tout q voisin de p .

On a $\exp_p(0) = c_0(1) = p$. On a également $\exp_p(tX) = c_{tX}(1) = c_X(t)$ donc la courbe $t \mapsto \exp_p(tX)$ est la géodésique c_X . L'application $\exp_p$ envoie la droite vectorielle $t \mapsto tX$ de l'espace tangent sur c_X .



Lemme 3.3.2.4 (L'EXPONENTIELLE EST UNE PARAMÉTRISATION). Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'application $\exp_p: B(0, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ est une paramétrisation.

Il est implicite qu'on identifie $T_p\Sigma$ à $\mathbf{R}^2$, par exemple via $d_{x_0}f$ ou via le choix d'une base de $T_p\Sigma$. Il est donc licite de parler de paramétrisation définie sur $B(0, \varepsilon) \subset T_p\Sigma$.

Démonstration. Avec les notations du lemme 3.3.2.1, le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que l'application

$$\text{EXP}: (x_1, v_1, t) \mapsto x_{(x_1, v_1)}(t)$$

est lisse sur $V \times B(0, \frac{T\delta}{2}) \times]-2, 2[$, donc $\exp_p = f \circ \text{EXP}(x_0, *, 1) \circ (d_{x_0})^{-1}$ est lisse. Au vu de la proposition 2.3.0.5, il suffit de montrer que $\exp_p$ est une immersion en $0 \in T_p\Sigma$. Pour cela on calcule la différentielle de $\exp_p$ en $0 \in T_p\Sigma$. Remarquons qu'en considérant $T_p\Sigma$ comme une sous-variété de $\mathbf{R}^3$, son espace tangent en 0 est $T_0(T_p\Sigma) = T_p\Sigma$. Par ailleurs, $\exp_p(0) = p$. Calculons donc la différentielle $d_0 \exp_p: T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$. C'est en fait trivial : par règle de dérivation des fonctions composées on a

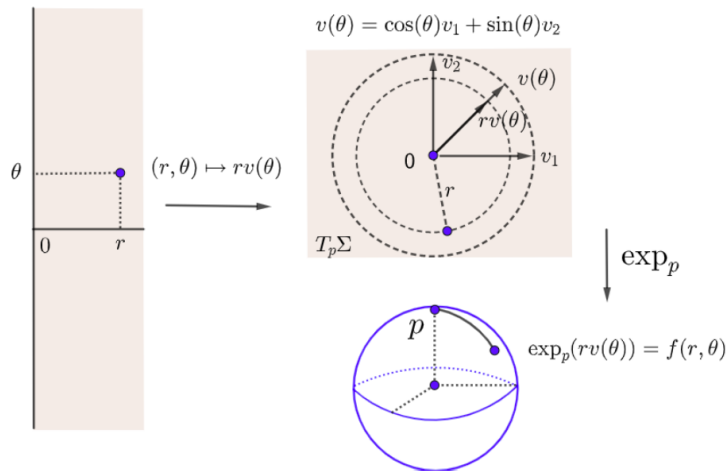
$$(d_0 \exp_p) \cdot X = \frac{d}{dt}(\exp_p(tX))|_{t=0} = c'_X(0) = X$$

donc $d_0 \exp_p$ est l'identité sur $T_p\Sigma$. Il s'ensuit que $\exp_p$ est une immersion et on conclut avec 2.3.0.5. $\square$

Définition 3.3.2.5 (COORDONNÉES GÉODÉSIQUES). Soient ε comme dans le lemme 3.3.2.4 et (v_1, v_2) une base orthonormée de $T_p\Sigma$. On appelle *coordonnées géodésiques* en $p \in \Sigma$ la paramétrisation locale

$$(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) = \exp_p(r(\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2)), \quad]0, \varepsilon[\times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma.$$

C'est une paramétrisation sur $]0, \varepsilon[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ pour tout $\theta_0 \in \mathbf{R}$.



Lemme 3.3.2.6 (GAUSS). Les coordonnées géodésiques sont géodésiques, *i.e.* vérifient

$$M_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(r, \theta) \end{pmatrix} \quad \text{pour } J > 0.$$

Démonstration. C'est bien une paramétrisation locale car composée de la paramétrisation locale $\phi(r, \theta) = r(\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2)$ entre $]0, \varepsilon[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ et $B(0, \varepsilon) \subset T_p\Sigma$ et de la paramétrisation $\exp_p$. Rappelons que

$$M_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \langle \partial_r f, \partial_r f \rangle & \langle \partial_r f, \partial_\theta f \rangle \\ \langle \partial_r f, \partial_\theta f \rangle & \langle \partial_\theta f, \partial_\theta f \rangle \end{pmatrix}.$$

Notant $v(\theta) = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2 \in T_p\Sigma$ alors $r \mapsto rv(\theta)$ est une droite vectorielle de $T_p\Sigma$ donc $f(r, \theta) = \exp_p(rv(\theta)) = c_{v(\theta)}(r)$ est la géodésique de vitesse $v(\theta)$ en p . Puisque qu'une géodésique est paramétrée à vitesse constante, on a

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = \langle c'_v(r), c'_v(r) \rangle = \langle c'_v(0), c'_v(0) \rangle = \|v\|^2 = 1. \quad (3.22)$$

Pour prouver que $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \rangle = 0$, on montre d'abord qu'il est constant par rapport à r . En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \right\rangle \\ &= \left\langle c''_v(r), \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \right\rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

puisque $c''_v \perp T_{c_v(r)}\Sigma \ni \frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = 1$ d'après (3.22). $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \rangle$ est donc constant par rapport à r . Fixons θ , on a d'une part $\frac{\partial f}{\partial r} = c'_v(r)$ tend vers v lorsque $r \rightarrow 0$ et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{d}{d\theta}(\exp_p(rv(\theta))) = (d_{rv(\theta)} \exp_p)(rv'(\theta)) \\ &\rightarrow (d_0 \exp_p)(0) = 0 \end{aligned}$$

quand $r \rightarrow 0$, donc $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \rangle = 0$. □

On en déduit (cf. remarque 3.1.3.4) que les définitions 3.1.3.2 et 3.3.1.1 des géodésiques sont équivalentes.

Théorème 3.3.2.7 (GÉODÉSIQUE I = GÉODÉSIQUE II). Soit $v \in T_p\Sigma$ unitaire, alors pour tout $0 \leq r \leq r' \leq \varepsilon$:

- (i) $d_\Sigma(c_v(r), c_v(r')) = |r - r'| = \ell(c_v|_{[r, r']})$ et c_v est l'unique géodésique minimisante de Σ joignant p à $c_v(r)$;
- (ii) $\exp_p(B(0, r)) = B_\Sigma(p, r)$ et $\exp_p(S(0, r)) = S_\Sigma(p, r)$;
- (iii) Les rayons géodésiques $r \mapsto c_v(r)$ issus de p sont perpendiculaires aux sphères $S_\Sigma(p, r)$.

Un raffinement des arguments précédents montrerait qu'il existe un voisinage de p dans lequel toute paire de points est joint par une unique géodésique minimisante. La question de l'existence d'une géodésique entre deux points quelconques de Σ est d'une autre nature, dépendant d'hypothèses topologiques sur Σ . Ainsi sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, il n'existe pas de géodésique joignant $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Pour la culture générale, mentionnons :

Théorème 3.3.2.8 (HOPF-RINOW - 1931). Soit Σ une surface connexe. Sont équivalents :

- (i) Il existe $p \in \Sigma$ tel que $\exp_p$ est définie sur $T_p\Sigma$.
- (ii) Pour tout $p \in \Sigma$, $\exp_p$ est définie sur $T_p\Sigma$.
- (iii) L'espace métrique (Σ, d_Σ) est complet.
- (iv) Les fermés bornés de (Σ, d_Σ) sont compacts.

Si l'une des conditions est vraie, entre toute paire de points il existe une géodésique minimisante.

3.4 Le « Theorema Egregium »

Il s'agit d'un « théorème excellent » d'après Gauss lui-même.

Théorème 3.4.0.1 (THEOREMA EGREGIUM). La courbure de Gauss $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$ d'une surface dépend seulement de sa distance intrinsèque.

Ce qui veut dire que si $\phi: (\Sigma, d_\Sigma) \rightarrow (\Sigma', d_{\Sigma'})$ est une isométrie, alors $\kappa(\phi(p)) = \kappa(p)$ pour tout $p \in \Sigma$. Une formulation équivalente est de dire que κ ne dépend que de la première forme fondamentale, ou de son expression

M_f . En effet supposons l'isométrie ϕ lisse⁴ (vue à travers des coordonnées). Si (U, f) est une paramétrisation de Σ alors $(U, f \circ \phi)$ est une paramétrisation de Σ' telle que $M_f(x) = M_{\phi \circ f}(x)$ (exercice). Réciproquement, deux surfaces admettant la même expression de leur première forme fondamentale sont isométriques. En particulier le théorème dit que κ de la première forme fondamentale mais pas de la seconde forme fondamentale. Cela explique pourquoi le plan et le cylindre qui sont isométriques, mais n'ont pas la même seconde forme fondamentale, ont la même courbure de Gauss $\kappa = 0$. Une conséquence importante du théorème est qu'il donne une obstruction à l'existence d'une isométrie entre deux surfaces. Ainsi il n'existe pas d'isométrie locale entre la sphère et le plan puisque leur courbures de Gauss sont différentes, $1 \neq 0$. On prouve que κ ne dépend que de M_f en utilisant les coordonnées géodésiques :

Lemme 3.4.0.2 (COURBURE DE GAUSS EN COORDONNÉES GÉODÉSQUES). Soit $f(r, \theta) : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \Sigma$ des coordonnées géodésiques autour d'un point $p \in \Sigma$ telles que

$$M_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(r, \theta) \end{pmatrix}$$

alors

$$\kappa = -\frac{J''}{J} \quad \text{où} \quad J'' = \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}.$$

Une formule générale existe pour des coordonnées quelconques, en fonction des dérivées à l'ordre ≤ 2 des coefficients de M_f .

Démonstration. Commençons par écrire les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ (où $(u_1, u_2) = (r, \theta)$) dans la base $(\partial_r f, \partial_\theta f, \nu)$. Pour plus de lisibilité, on note $\partial_{ij}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$ et on s'autorise le mélange de notations $r = 1$ et $\theta = 2$. Rappelant les notations $[\Pi_p] = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ et $[W_p] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a

$$\partial_{rr}^2 f = \Gamma_{11}^1 \partial_r f + \Gamma_{11}^2 \partial_\theta f + A\nu \quad (3.23)$$

$$\partial_{r\theta}^2 f = \Gamma_{12}^1 \partial_r f + \Gamma_{12}^2 \partial_\theta f + B\nu \quad (3.24)$$

$$\partial_{\theta\theta}^2 f = \Gamma_{22}^1 \partial_r f + \Gamma_{22}^2 \partial_\theta f + C\nu \quad (3.25)$$

$$-\partial_r \nu = a \partial_r f + b \partial_\theta f \quad (3.26)$$

$$-\partial_\theta \nu = c \partial_r f + d \partial_\theta f. \quad (3.27)$$

La base $(\partial_r f, \partial_\theta f, \nu)$ est orthogonale et $r \mapsto f(r, \theta)$ est une géodésique. Cela permet de simplifier (3.23), (3.24). Montrons que (3.23) se réduit à

$$\partial_{rr}^2 f = A\nu. \quad (3.28)$$

En dérivant $1 = \langle \partial_r f, \partial_r f \rangle$ par rapport à r , on a $\langle \partial_{rr}^2 f, \partial_r f \rangle = 0$. En dérivant en θ on a $\langle \partial_{\theta r}^2 f, \partial_r f \rangle = 0$. En dérivant, alors $0 = \langle \partial_r f, \partial_\theta f \rangle$, on a $0 = \langle \partial_{rr}^2 f, \partial_\theta f \rangle + \langle \partial_r f, \partial_{r\theta}^2 f \rangle = \langle \partial_{rr}^2 f, \partial_\theta f \rangle$. On aurait aussi pu dire que $\partial_{rr}^2 f = c''$, où $c(r) = f(r, \theta)$ est une géodésique. Montrons que (3.24) se réduit elle à

$$\partial_{r\theta}^2 f = \frac{J'}{J} \partial_\theta f + B\nu. \quad (3.29)$$

La nullité de Γ_{12}^1 vient de $\langle \partial_{\theta r}^2 f, \partial_r f \rangle = 0$. Le coefficient de $\partial_\theta f$ vient de

$$2JJ' = \frac{\partial}{\partial r} \langle \partial_\theta f, \partial_\theta f \rangle = 2 \langle \partial_{r\theta}^2 f, \partial_\theta f \rangle = 2\Gamma_{12}^2 \langle \partial_\theta f, \partial_\theta f \rangle = 2\Gamma_{12}^2 J^2.$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\partial_{rr}^2 f) - \frac{\partial}{\partial r} (\partial_{r\theta}^2 f) = 0$$

dont laquelle on injecte (3.28) et (3.29) :

$$0 = (\partial_\theta A)\nu + A\partial_\theta \nu - \left[\left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_\theta f + \frac{J'}{J} \partial_{r\theta}^2 f + (\partial_r B)\nu + B\partial_r \nu \right].$$

Injectons à nouveau (3.29), mais aussi (3.26) et (3.27) :

$$0 = (\partial_\theta A)\nu - A(c\partial_r f + d\partial_\theta f) - \left[\left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_\theta f + \frac{J'}{J} \left(\frac{J'}{J} \partial_\theta f + B\nu \right) + (\partial_r B)\nu - B(a\partial_r f + b\partial_\theta f) \right].$$

4. Une isométrie entre variétés riemanniennes est nécessairement lisse.

Regroupons :

$$0 = (-Ac + Ba)\partial_r f + \left(-Ad - \frac{J''}{J} + Bb\right)\partial_\theta f + \left(\partial_\theta A - \frac{J'}{J}B - \partial_r B\right)\nu.$$

En particulier la nullité du deuxième coefficient donne, en utilisant $[\Pi_p] = [I_p][W_p]$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ J^2 b & J^2 d \end{pmatrix}$$

que

$$-\frac{J''}{J} = Ad - Bb = ad - cb = \det(W) = \kappa.$$

□

Corollaire 3.4.0.3. La sphère et le plan ne sont nulle part localement isométriques.

La réciproque du théorème est fautive : avoir la même courbure de Gauss n'implique pas d'être isométrique.

Exercice 3.4.0.4. Montrer que les surfaces définies par $f_1(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \ln(v))$ et $f_2(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$ ont même courbure de Gauss mais ne sont pas isométriques.

La relation entre courbure de Gauss et distance intrinsèque est encore plus claire dans le résultat suivant :

Corollaire 3.4.0.5 (COURBURE DE GAUSS ET LONGUEUR DES PETITS CERCLES). Si $p \in \Sigma$, alors la longueur de $S(p, \varepsilon)$, le cercle intrinsèque de Σ de centre p et de rayon $\varepsilon > 0$, vérifie l'estimée

$$\ell(S(p, \varepsilon)) = 2\pi\varepsilon \left(1 - \kappa(p) \frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2) \right).$$

On voit que la courbure de Gauss mesure le défaut infinitésimal d'eulidianité de la longueur des petits cercles.

Démonstration. Soient (v_1, v_2) une base orthonormée de $T_p \Sigma$ et $v(\theta) = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$. Posons $w(\theta) = -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2 = v'(\theta)$. Soit $f(r, \theta) = \exp_p(rv(\theta))$ les coordonnées géodésiques associées. On voit que

$$\partial_\theta f = d_{rv} \exp_p \left(\frac{d}{d\theta} rv \right) = d_{rv} \exp_p(rw) = rw + o(r)$$

puisque $d_0 \exp_p = \text{Id}_{T_p \Sigma}$. Il s'ensuit que $J(r, \theta) = r + o(r)$ et $J'(r, \theta) = 1 + o(1)$. On prolonge J en 0 par $J(0) = 0$ et $J'(0) = 1$. Puisque $J'' = -\kappa J$, on a $J^{(3)} = -\kappa' J - \kappa J'$ et on prolonge en 0 en $J^{(3)}(0) = -\kappa(p)$. Le développement limité donne alors

$$J(r) = r - \kappa(p) \frac{r^3}{6} + o(r^3).$$

En intégrant θ de 0 à 2π ,

$$\ell(S(p, \varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \|\partial_\theta f(\varepsilon, \theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} J(\varepsilon, \theta) d\theta = 2\pi \left(\varepsilon - \kappa(p) \frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^3) \right).$$

□

4 Formes différentielles

4.1 Préliminaires algébriques

Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension n et soit $k, \ell \in \mathbf{N}_{>0}$. Le but de cette section est définir l'espace $\mathcal{A}^k(E)$ des k -formes linéaires alternées - les applications $E^k \rightarrow \mathbf{R}$ linéaires en chaque variable et alternées (penser au déterminant, c'est une n -forme linéaire alternée) - et un produit extérieur

$$\wedge : \mathcal{A}^k(E) \times \mathcal{A}^\ell(E) \rightarrow \mathcal{A}^{k+\ell}(E)$$

sur ces espaces avec des propriétés naturelles.

4.1.1 Tenseurs

On commence par étudier les k -formes linéaire et munir leur ensemble $\mathcal{L}^k(E)$ d'un produit extérieur

$$\otimes : \mathcal{L}^k(E) \times \mathcal{L}^\ell(E) \rightarrow \mathcal{L}^{k+\ell}(E)$$

Définition 4.1.1.1 (k -TENSEUR). Un k -tenseur ou tenseur d'ordre k ou k -forme linéaire sur E est une application $L : E^k \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire en chaque variable : pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, v_i et $w_i \in E$, $i \in \{1, \dots, k\}$ on a

$$L(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = aL(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bL(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k).$$

On note $\mathcal{L}^k(E)$ ou $\mathcal{L}^k$ l'espace (vectoriel) des k -tenseurs sur E .

Un 1-tenseur est une forme linéaire, un 2-tenseur une forme bilinéaire, le déterminant sur $\mathbf{R}^n$ est un n -tenseur. On convient qu'un 0-tenseur est une constante. Ainsi $\mathcal{L}^0 = \mathbf{R}$ et $\mathcal{L}^1(E) = E^*$.

Définition 4.1.1.2 (PRODUIT TENSORIEL). Le produit tensoriel de $L \in \mathcal{L}^k(E)$ et $T \in \mathcal{L}^\ell(E)$ est le $(k + \ell)$ -tenseur $L \otimes T \in \mathcal{L}^{k+\ell}(E)$ défini par

$$L \otimes T(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = L(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}).$$

Proposition 4.1.1.3. Soient L, T et U des tenseurs sur E et $c \in \mathbf{R}$. On a alors

- (i) (associativité) $L \otimes (T \otimes U) = (L \otimes T) \otimes U$;
- (ii) (homogénéité) $(cL) \otimes T = c(L \otimes T) = L \otimes (cT)$;
- (iii) (distributivité) si L et T sont de même ordre,

$$(L + T) \otimes U = L \otimes U + T \otimes U,$$

$$U \otimes (L + T) = U \otimes L + U \otimes T.$$

- (iv) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors pour $1 \leq k \leq n$, la famille

$$\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

est une base de $\mathcal{L}^k(E)$, qui est donc de dimension n^k et tout $L \in \mathcal{L}^k$ s'écrit

$$L = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*. \quad (4.1)$$

Démonstration. (i) à (iii) : Exercice.

- (iv) Pour tous $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$ on a

$$\begin{aligned} e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= e_{i_1}^*(v_{j_1}) \dots e_{i_k}^*(v_{j_k}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci implique que $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ est libre. En effet, supposons que

$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* = 0$ où $\lambda_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbf{R}$, alors en évaluant sur $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$, il ne reste que $\lambda_{j_1, \dots, j_k} = 0$. Vérifions (4.1), qui prouve que la famille est génératrice : sur E^k , on a

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_k) &= L\left(\sum_{i_1=1}^n e_{i_1}^*(v_1)e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n e_{i_k}^*(v_k)e_{i_k}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^*(v_1) \dots e_{i_k}^*(v_k) \\ &= \left(\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*\right)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Ainsi $L \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^2)$ défini par $L(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$ s'écrit $L = e_1^* \otimes e_1^* + 2e_1^* \otimes e_2^* + 3e_2^* \otimes e_2^*$ et $T = e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_1^* + 2e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* \in \mathcal{L}^3(\mathbf{R}^2)$ désigne le 3-tenseur vérifiant $T(x, y, z) = x_1y_1z_1 + 2x_2y_1z_3$. L'opération $(L, T) \mapsto L \otimes T$ est bilinéaire mais pas symétrique.

4.1.2 Tenseurs alternés

Définition 4.1.2.1 (TENSEURS ALTERNÉS). Un tenseur $T \in \mathcal{L}^k(E)$ est *alterné* si pour tous $1 \leq i \neq j \leq k$ et $v \in E^k$,

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

L'ensemble des k -tenseurs alternés est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^k(E)$, qu'on note $\mathcal{A}^k(E)$.

Par convention, $\mathcal{A}^0 = \mathbf{R}$ et $\mathcal{A}^1 = \mathcal{L}^1 = E^*$. Un 2-tenseur alterné est une forme bilinéaire antisymétrique, comme par exemple $T = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$. Le déterminant est un n -tenseur alterné sur $E = \mathbf{R}^n$.

Rappels sur le groupe symétrique : On rappelle quelques notions qui nous seront utiles. On renvoie au cours de Structures Algébriques 1 pour les compléments et preuves.

- Une *permutation* est une bijection $\{1, \dots, k\}$ dans lui-même.
- Le *groupe symétrique* ou *groupe des permutations* $\mathfrak{S}_k$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$, muni de la loi de composition.
- Une permutation est une *transposition* si elle échange deux entiers $i \neq j$ et fixe les autres.
- Toute permutation est produit de transpositions (la décomposition n'est pas unique).
- Il existe un morphisme appelée *signature* $\varepsilon: \mathfrak{S}_k \rightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ qui vaut -1 sur les transpositions.

On a donc $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ où les τ_i sont des transpositions. Notons aussi que $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\sigma)$.

On revient aux tenseurs. On fait agir $\mathfrak{S}_k$ sur $\mathcal{L}^k(E)$ comme suit.

Définition 4.1.2.2 (ACTION DES PERMUTATIONS SUR LES TENSEURS). Si $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ et $T \in \mathcal{L}^k(E)$, on définit le k -tenseur ${}^\sigma T \in \mathcal{L}^k(E)$ par

$${}^\sigma T(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Si on pense à un k -uplet $v = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$ de vecteurs comme à une application $v: \{1, \dots, k\} \rightarrow E$, cela revient à dire que ${}^\sigma T(v) = T(v \circ \sigma)$.

Remarque 4.1.2.3. (1) On a $({}^{\sigma\alpha})T = {}^\sigma({}^\alpha T)$ puisque :

$$({}^{\sigma\alpha})T(v) = T(v \circ \sigma \circ \alpha) = {}^\alpha T(v \circ \sigma) = {}^\sigma({}^\alpha T)(v).$$

(2) Soient $f_1, \dots, f_k \in E^*$. En posant $\sigma(i) = j_i$, on a $i = \sigma^{-1}(j_i)$, donc pour tout $v \in E^k$

$$\begin{aligned} {}^\sigma(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) &= f_1(v_{\sigma(1)}) \cdots f_k(v_{\sigma(k)}) \\ &= f_{\sigma^{-1}(j_1)}(v_{j_1}) \cdots f_{\sigma^{-1}(j_k)}(v_{j_k}) \\ &= f_{\sigma^{-1}(1)}(v_1) \cdots f_{\sigma^{-1}(k)}(v_k) \\ &\quad (\text{en réordonnant les } j_i \text{ par ordre croissant}) \\ &= (f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(k)})(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

D'après (1) on peut oublier les parenthèses et écrire ${}^{\sigma\alpha}T$. L'opération $T \mapsto {}^\sigma T$ est linéaire et même un isomorphisme de $\mathcal{L}^k$ et T alterné équivaut à ${}^\tau T = -T$ pour toute transposition.

Proposition 4.1.2.4. Soit T un k -tenseur sur E . Sont équivalents :

- (i) T est alterné.
- (ii) ${}^\sigma T = \varepsilon(\sigma)T$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, i.e. sur E^k on a

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)T(v_1, \dots, v_k).$$

(iii) Pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$ linéairement dépendants, on a $T(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i). Évident.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, écrivons $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ pour des transpositions τ_i , alors $\tau_1 \cdots \tau_m T = \tau_1(\tau_2(\cdots(\tau_m T) \cdots)) = (-1)^m T = \varepsilon(\sigma)T$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Traitons d'abord le cas où il existe $i \neq j$ tel que $v_i = v_j =: v \in E$. Soit τ la transposition qui échange i et j alors

$${}^\tau T(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_k)$$

et par ailleurs ${}^{\tau}T = -T$, d'où $T(v_1, \dots, v_k) = 0$. Supposons maintenant $(v_1, \dots, v_k)$ liée, il existe donc i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$, alors

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) = \sum_{j \neq i} \lambda_j T(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_k) = 0$$

puisque v_j apparaît 2 fois.

(iii) $\Rightarrow$ (i). On a

$$\begin{aligned} 0 &= T(v_1, \dots, x + y, \dots, x + y, \dots, v_k) \\ &= T(v_1, \dots, x, \dots, x, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, x, \dots, y, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, y, \dots, x, \dots, v_k) \\ &\quad + T(v_1, \dots, y, \dots, y, \dots, v_k) \\ &= T(v_1, \dots, x, \dots, y, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, y, \dots, x, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.2.5. $\mathcal{A}^k(E) = \{0\}$ lorsque $k > n$ puisque $\{v_1, \dots, v_k\}$ est nécessairement liée.

Définition 4.1.2.6 (ALTERNISATION D'UN TENSEUR). Soit $T \in \mathcal{L}^k(E)$, on définit un k -tenseur alterné $\text{Alt}(T) \in \mathcal{A}^k(E)$ par

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) {}^{\sigma}T.$$

L'application $\text{Alt}: \mathcal{L}^k(E) \rightarrow \mathcal{A}^k(E)$ est linéaire et l'identité sur $\mathcal{A}^k(E)$.

Vérifions que $\text{Alt}(T)$ est alterné : pour toute transposition τ on a

$$\begin{aligned} {}^{\tau}(\text{Alt}(T)) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) {}^{\tau}({}^{\sigma}T) \quad \text{par linéarité de l'action de } \tau \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) {}^{\tau\sigma}T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1) \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma) {}^{\tau\sigma}T \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) {}^{\sigma}T = -\text{Alt}(T) \end{aligned}$$

où on a posé $\alpha = \tau\sigma$ et utilisé $\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$ et le fait que $\sigma \mapsto \tau\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}_k$ dans lui-même. Supposons maintenant T alterné, alors $\varepsilon(\sigma) {}^{\sigma}T = \varepsilon(\sigma)^2 T = T$, donc $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) {}^{\sigma}T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} T = k!T$, d'où $\text{Alt}(T) = T$ (le $\frac{1}{k!}$ dans la définition sert à ça).

Remarque 4.1.2.7. On a

$$\text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(k)} \quad (4.2)$$

d'où

$$\text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \det(f_i(v_j))_{i,j}. \quad (4.3)$$

Montrons-le. On a d'après la remarque 4.1.2.3 (2) :

$$\begin{aligned} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma^{-1}) f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(k)} \end{aligned}$$

vu que $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_k$ dans lui-même, d'où

$$\begin{aligned} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)}(v_1) \dots f_{\sigma(k)}(v_k) \\ &= \frac{1}{k!} \det(f_i(v_j))_{i,j} \end{aligned}$$

en rappelant que $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(k),k}$ pour $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de taille $k \times k$.

Définition 4.1.2.8 (PRODUIT EXTÉRIEUR). Étant donné $L \in \mathcal{A}^k(E)$ et $T \in \mathcal{A}^\ell(E)$, on définit un $(k + \ell)$ -tenseur alterné $L \wedge T \in \mathcal{A}^{k+\ell}(E)$ par

$$L \wedge T = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \sigma(L \otimes T) \quad \left(= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(L \otimes T) \right).$$

Théorème 4.1.2.9. Soient L, T, U des tenseurs alternés sur E et $c \in \mathbf{R}$, alors : (i) (*Associativité*) $L \wedge (T \wedge U) = (L \wedge T) \wedge U$;
(ii) (*Homogénéité*) $(cL) \wedge T = c(L \wedge T) = L \wedge (cT)$;
(iii) (*Distributivité*) Si L et T sont de même ordre ;

$$\begin{aligned} (L + T) \wedge U &= L \wedge U + T \wedge U \\ U \wedge (L + T) &= U \wedge L + U \wedge T. \end{aligned}$$

(iv) (*Antisymétrie*) Si L et T sont d'ordre k et ℓ alors $L \wedge T = (-1)^{k\ell} T \wedge L$;
(v) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors la famille

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\mathcal{A}^k(E)$, qui est donc de dimension $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et tout $L \in \mathcal{A}^k(E)$ s'écrit

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

(vi) Si $f_1, \dots, f_k$ sont des 1-tenseurs sur E alors

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(k)}$$

donc

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_k(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)}(v_1) \dots f_{\sigma(k)}(v_k) = \det(f_i(v_j))_{i,j}$$

et

$$f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) f_1 \wedge \dots \wedge f_k.$$

(vii) En particulier, $\dim(\mathcal{A}^n(E)) = 1$ et tout $L \in \mathcal{A}^n(E)$ vérifie sur E^n que

$$L(v_1, \dots, v_n) = L(e_1, \dots, e_n) \det(e_i^*(v_j))_{i,j}.$$

Le point (i) est la propriété la plus difficile à vérifier. On montre ce point dans le lemme suivant :

Lemme 4.1.2.10. (i) Si $\text{Alt}(L) = 0$ ou $\text{Alt}(T) = 0$, alors $\text{Alt}(L \otimes T) = 0$.
(ii) $\text{Alt}(L \otimes T \otimes U) = \text{Alt}(\text{Alt}(L \otimes T) \otimes U) = \text{Alt}(L \otimes \text{Alt}(T \otimes U))$.
(iii) Si L, T, U sont d'ordre k, ℓ, m respectivement alors

$$(L \wedge T) \wedge U = \frac{(k + \ell + m)!}{k!\ell!m!} \text{Alt}(L \otimes T \otimes U) = L \wedge (T \wedge U).$$

Démonstration. (i) Supposons L, T d'ordre k, ℓ respectivement et $\text{Alt}(L) = 0$. Par définition

$$\text{Alt}(L \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}).$$

Fixons $\alpha \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$ et considérons $\mathfrak{S}(\alpha) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}; \sigma = \alpha \text{ sur } \{k+1, \dots, k+\ell\}\}$. Les $\sigma \in \mathfrak{S}(\alpha)$ sont les permutations de $\{1, \dots, k+\ell\}$ qui s'écrivent

$$(1, \dots, k+\ell) \mapsto (\alpha(\tau(1)), \dots, \alpha(\tau(k)), \alpha(k+1), \dots, \alpha(k+\ell))$$

où $\tau \in \mathfrak{S}_k$. La contribution de ces $\sigma \in \mathfrak{S}(\alpha)$ à la somme ci-dessus vaut donc

$$\varepsilon(\alpha) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\tau) L(v_{\alpha(\tau(1))}, \dots, v_{\alpha(\tau(k))}) \right) T(v_{\alpha(k+1)}, \dots, v_{\alpha(k+\ell)}).$$

La quantité entre parenthèses vaut $(k!) \text{Alt}(L)(v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(k)}) = 0$ par hypothèse. Comme on peut partitionner $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ en sous-ensembles de la forme $\mathfrak{S}(\alpha)$, on conclut que $\text{Alt}(L \otimes T) = 0$. L'argument est semblable si $\text{Alt}(T) = 0$.
(ii) Comme $\text{Alt}(\text{Alt}(L \otimes T) - L \otimes T) = 0$, la propriété (i) donne

$$\text{Alt}([\text{Alt}(L \otimes T) - L \otimes T] \otimes U) = 0 = \text{Alt}(\text{Alt}(L \otimes T) \otimes U) - \text{Alt}(L \otimes T \otimes U)$$

d'où $\text{Alt}(L \otimes T \otimes U) = \text{Alt}(\text{Alt}(L \otimes T) \otimes U)$. On montre de même que $\text{Alt}(L \otimes T \otimes U) = \text{Alt}(L \otimes \text{Alt}(T \otimes U))$.
(iii) On a

$$\begin{aligned} (L \wedge T) \wedge U &= \frac{(k + \ell + m)!}{(k + \ell)!m!} \text{Alt}((L \wedge T) \otimes U) = \frac{(k + \ell + m)!}{(k + \ell)!m!} \frac{(k + \ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(\text{Alt}(L \otimes T) \otimes U) \\ &= \frac{(k + \ell + m)!}{k!\ell!m!} \text{Alt}(L \otimes T \otimes U) \end{aligned}$$

en utilisant (ii). L'autre égalité s'obtient de même, prouvant l'associativité. Ceci conclut la preuve du lemme. $\square$

On peut maintenant montrer le théorème.

Démonstration du théorème 4.1.2.9. La propriété (i) étant prouvée dans le lemme précédent, on peut désormais oublier les parenthèses et écrire $L \wedge T \wedge U$. Les points (ii) et (iii) se démontrent par linéarité de l'application Alt .
(iv) Soit π la permutation qui envoie $(1, \dots, k + \ell)$ sur $(k + 1, \dots, k + \ell, 1, \dots, k)$. On a $\varepsilon(\pi) = (-1)^{k\ell}$ et ${}^\pi(L \otimes T) = T \otimes L$. En effet, c'est l'application

$$(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \mapsto L(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell})T(v_1, \dots, v_k).$$

On a alors

$$\begin{aligned} (k + \ell)! \text{Alt}(T \otimes L) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) {}^\sigma(T \otimes L) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) {}^{\sigma\pi}(L \otimes T) \\ &= \varepsilon(\pi) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\pi) {}^{\sigma\pi}(L \otimes T) \\ &= (-1)^{k\ell} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\alpha) {}^\alpha(L \otimes T) = (-1)^{k\ell} \text{Alt}(L \otimes T) \end{aligned}$$

puisque $\sigma \mapsto \sigma\pi = \alpha$ est une bijection sur $\mathfrak{S}_k$.

(vi) Découle de l'égalité

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_k = (k!) \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k) \quad (4.4)$$

prouvée ci-après par récurrence et la remarque 4.1.2.7. L'égalité (4.4) est vraie pour $k = 1$. Supposons (4.4) vraie pour k formes linéaires. On a par associativité

$$\begin{aligned} (f_1 \wedge \dots \wedge f_k) \wedge f_{k+1} &= \frac{(k + 1)!}{k!1!} \text{Alt}((f_1 \wedge \dots \wedge f_k) \otimes f_{k+1}) \\ &= (k + 1)k! \text{Alt}(\text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k) \otimes f_{k+1}) \\ &= (k + 1)! \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_{k+1}) \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la ligne 2 et le lemme 4.1.2.10(ii) en ligne 3.

En utilisant la première partie de (vi), on a (poser $g_i = f_{\sigma(i)}$ pour s'en convaincre)

$$\begin{aligned} f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(k)} &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\alpha) f_{\sigma(\alpha(1))} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(\alpha(k))} \\ &= \varepsilon(\sigma) \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\alpha) f_{\sigma(\alpha(1))} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(\alpha(k))} \quad (\text{car } \varepsilon^2(\sigma) = 1) \\ &= \varepsilon(\sigma) \sum_{\beta \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\beta) f_{\beta(1)} \otimes \dots \otimes f_{\beta(k)} \quad (\text{en posant } \beta = \sigma\alpha) \\ &= \varepsilon(\sigma) f_1 \wedge \dots \wedge f_k \quad \text{d'après le début de (vi).s} \end{aligned}$$

(v) L'égalité (4.4) implique en particulier $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = k! \text{Alt}(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)$ donc que $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ engendre $\mathcal{A}^k = \text{Alt}(\mathcal{L}^k)$ mais il y a beaucoup de tenseurs nuls ou égaux au signe près dans cette famille. La propriété (vi) montre que $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est encore génératrice de $\mathcal{A}^k$. Montrons que la famille est libre. Soient deux k -uplets strictement croissants $(i_1, \dots, i_k)$ et $(j_1, \dots, j_k)$ de $\{1, \dots, n\}$, alors

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, d'après (vi)

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}}(e_{j_1}) \cdots e_{i_{\sigma(k)}}(e_{j_k}).$$

Si $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$ la somme est nulle et si $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$, alors $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$ et $e_{i_{\sigma(1)}}(e_{j_1}) \cdots e_{i_{\sigma(k)}}(e_{j_k}) = 1$ si $\sigma = \text{Id}$ et 0 sinon, donc la somme vaut 1. On conclut comme dans la preuve de la proposition 4.1.1.3(iv).

(vii) D'après (v), on a $L = L(e_1, \dots, e_n) e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ et on conclut avec (vi). $\square$

Remarque 4.1.2.11. On a $\dim(\mathcal{A}^n(\mathbf{R}^n)) = 1$ et d'après (iv), on a $\det = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ dans la base canonique. D'après (vii), tout $L \in \mathcal{A}^n(\mathbf{R}^n)$ s'écrit donc $L = L(e_1, \dots, e_n) \det$. La morale est que le déterminant est essentiellement le seul n -tenseur alterné sur $\mathbf{R}^n$.

4.2 Formes différentielles

Définition 4.2.0.1 (FORMES DIFFÉRENTIELLES). Une *forme différentielle d'ordre k* (ou k -forme différentielle) lisse sur un ouvert U de E est une application lisse de U dans $\mathcal{A}^k(E)$. L'espace vectoriel des k -formes différentielles est noté $\Omega^k(U)$.

On note que $\Omega^0(U) = \{\alpha : U \rightarrow \mathbf{R} \text{ lisse}\}$, c'est juste l'ensemble des fonctions réelles lisses. La différentielle d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ lisse est $df : U \rightarrow \mathcal{L}^1(E) = \mathcal{A}^1(E)$, $x \mapsto d_x f$, on a donc $df \in \Omega^1(U)$. Un exemple de 2-forme différentielle est $\alpha_{(x,y)} = x^2 e_1^* \wedge e_2^*$.

Tout $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit, en $x \in U$,

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$$

où $x \mapsto \alpha_{i_1 \dots i_k}(x)$ est lisse (c'est $\alpha_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$). Observons que la fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, que l'on notera x_i par abus de langage⁵, vérifie $dx_i = e_i^*$ puisqu'en fait $x_i = e_i^*$ est linéaire. On peut donc écrire

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

En particulier, pour la différentielle de $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ on retrouve la formule bien connue

$$df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

La définition du produit extérieur s'étend aux formes différentielles : si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on définit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ par $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$. On vérifie que les $(\alpha \wedge \beta)_{i_1 \dots i_{k+\ell}}$ sont lisses comme combinaisons linéaires de *produits* des $\alpha_{j_1 \dots j_k}$ et des $\beta_{m_1 \dots m_\ell}$.

4.3 Différentielle extérieure

Le but de cette section est de définir un opérateur différentiel $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ qui étend la différentielle usuelle $d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$. La différentielle usuelle d'une k -forme différentielle n'est pas une $(k+1)$ -forme différentielle a priori. Pour éviter la confusion avec l'opérateur d qu'on veut construire, notons désormais D la différentielle usuelle. Si α est une k -forme différentielle, c'est une application lisse $\alpha : U \rightarrow \mathcal{A}^k(E) \subset \mathcal{L}^k(E)$ et sa différentielle est $D\alpha : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E))$ qu'on peut identifier⁶ à $\mathcal{L}^{k+1}(E)$. On peut donc voir $D\alpha(x) := D_x \alpha$ comme un $(k+1)$ -tenseur, qui à $(v, v_1, \dots, v_k)$ associe

$$D_x \alpha(v)(v_1, \dots, v_k) = \frac{d}{dt} \alpha_{x+tv}(v_1, \dots, v_k)$$

Il est alterné en les k dernières variables $(v_1, \dots, v_k)$ mais pas en $(v, v_1, \dots, v_k)$ a priori. On obtient un tenseur alterné en composant D avec Alt . Précisément, on peut définir une différentielle dite *extérieure*, $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ en posant $d = (k+1) \text{Alt} \circ D$. Elle coïncide avec la différentielle usuelle si $k = 0$. On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$.

5. C'est le même abus de langage que de parler de la fonction $x^2 + x$, au lieu de $f : x \mapsto x^2 + x$.

6. On associe à $\ell : E \rightarrow \mathcal{L}^k(E)$ linéaire le $k+1$ -tenseur L défini par $L(v, v_1, \dots, v_k) = \ell(v)(v_1, \dots, v_k)$.

Théorème 4.3.0.1 (DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE). Il existe une application linéaire $d: \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ et une seule avec les propriétés suivantes :

- (i) $d(\Omega^k(U)) \subset \Omega^{k+1}(U)$;
- (ii) La restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions ;
- (iii) Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$;
- (iv) $d \circ d = 0$.

Démonstration. On montre d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$, on a $d(dx_i) = 0$. En utilisant (iii) et une récurrence on déduit que $d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_k$ dans $\{1, \dots, n\}$. Si $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ est lisse, on a donc d'après (iii) On a

$$d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

on a donc par linéarité de d ,

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad (4.5)$$

où $d\alpha_{i_1 \dots i_k}$ est la différentielle usuelle d'après (ii). La formule (4.5) définit en fait complètement $d\alpha$ et suffit à définir la différentielle. Vérifions que cette formule coïncide avec la définition $d = (k+1) \text{Alt} \circ D$, avant de prouver qu'elle satisfait les contraintes demandées. Puisque $dx_i = e_i^*$ est constant, on a

$$D(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = Df \otimes (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = df \otimes (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}).$$

En composant avec $(k+1) \text{Alt}$ (et notant que $k+1 = \frac{(k+1)!}{k!1!}$) on trouve par définition du produit extérieur (cf. définition 4.1.2.8)

$$(k+1) \text{Alt} \circ D(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

et l'égalité pour $d\alpha$ en découle par linéarité. Pour montrer (iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \text{ et } \beta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}.$$

On a

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= (f dg + g df) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ d\alpha \wedge \beta &= g df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ \alpha \wedge d\beta &= f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= (-1)^k f dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}. \end{aligned}$$

Pour $d \circ d = 0$, on commence par les fonctions. Puisque $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, on a d'après (4.5) :

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

d'après le lemme de Schwarz. En particulier, $d(dx_i) = 0$ et $d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0$, donc pour α une k -forme

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(d\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0$$

en utilisant (iii). On aurait pu aussi raisonner directement à partir de $d \circ d = (k+2)(k+1) \text{Alt} \circ D^2$, en montrant que $D^2\alpha$ est un $(k+2)$ -tenseur symétrique en les 2 premières variables, puis que $\text{Alt}(T) = 0$ pour tout tenseur T admettant une symétrie par rapport à 2 variables. $\square$

Par exemple si U est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et $\alpha = A dx + B dy + C dz$, alors

$$d\alpha = \left(-\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \wedge dy + \left(-\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(-\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) dy \wedge dz.$$

Si $\beta = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, alors

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Définition 4.3.0.2 (FORME FERMÉE, FORME EXACTE). Si $d\alpha = 0$, on dit que α est *fermée*. Si $\alpha = d\beta$, on dit que α est *exacte*. On convient qu'une 0-forme est exacte si elle est constante.

Il s'ensuit que $d \circ d = 0$ s'exprime par : une forme exacte est fermée. La réciproque est fautive en général : on verra que $\alpha = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ est fermée sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas exacte (exercice).

4.4 Le lemme de Poincaré

Définition 4.4.0.1. On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est *étoilé* s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x] := \{a + t(b - a) \in \mathbf{R}^n; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans U .

Théorème 4.4.0.2 (LEMME DE POINCARÉ). Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Démonstration. Si α est une 0-forme fermée, c'est une fonction dont la différentielle est nulle. Sur U connexe, elle est donc constante, donc exacte. Considérons le cas d'une 1-forme $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$. On cherche une fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_i d\alpha_i \wedge dx_i = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{j > i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{j < i} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \text{ (en inversant } i \text{ et } j) \\ &= \sum_{j < i} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i. \end{aligned}$$

L'hypothèse que α est fermé se traduit par la nullité des coefficients $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right)$ donc par $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$. Pour simplifier, supposons U étoilé par rapport à l'origine. Si $\alpha = df$, on doit avoir

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 d_{tx} f(x) dt = \int_0^1 \alpha_{tx}(x) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha_i(tx) x_i dt.$$

On voit qu'à une constante près, on n'a pas le choix pour f , donc on pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \alpha_i(tx) dt.$$

Vérifions que $df = \alpha$. En dérivant sous le signe somme

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx) dt \right) dx_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i,j} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx) x_i dt \right) dx_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i,j} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx) x_i dt \right) dx_j \text{ (en utilisant } \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) + \sum_j t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx) x_j dt \right) dx_i \text{ (en permutant encore } i \text{ et } j \text{ à droite)} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \alpha_i(tx)) dt dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i = \alpha. \end{aligned}$$

Pour une $(k+1)$ -forme, on peut procéder semblablement par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$, on définit $I(\alpha) \in \Omega^k(U)$ par

$$I(\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{tx}(x, v_1, \dots, v_k) dt.$$

On peut montrer que $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$, ce qui donne le résultat voulu lorsque $d\alpha = 0$ ($d(I(\alpha)) = \alpha$). $\square$

4.5 Effet d'applications lisses

Définition 4.5.0.1 (IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE). Soit U et V des ouverts d'espaces vectoriels et $f: U \rightarrow V$ lisse. L'*image réciproque* ou *tiré en arrière* de $\alpha \in \Omega^k(V)$ par f est la f -forme différentielle $f^*\alpha \in \Omega^k(U)$ définie par

$$(f^*\alpha)_x(u_1, \dots, u_k) = \alpha_{f(x)}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_k)).$$

On a utilisé le même procédé dans le chapitre 3 pour définir le tiré en arrière $f^*I_{f(a)}$. La seule différence est que les tenseurs étaient symétriques plutôt qu'alternés. Voyons comment calculer $f^*\alpha$ dans une base. Supposons $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ et $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow V$. Notons $(y_1, \dots, y_m)$ les coordonnées dans $\mathbf{R}^m$.

Lemme 4.5.0.2 ($f^*\alpha$ EN COORDONNÉES). Si $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} \in \Omega^k(V)$, alors pour tout $x \in U$

$$(f^*\alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k}(f(x)) d_x f_{i_1} \wedge \dots \wedge d_x f_{i_k}.$$

Démonstration. Observons que $dy_i(d_x f(u)) = d_x f_i(u)$. En utilisant la propriété (vi) du théorème 4.1.2.9,

$$\begin{aligned} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_k)) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) dy_{i_{\sigma(1)}}(d_x f(u_1)) \dots dy_{i_{\sigma(k)}}(d_x f(u_k)) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) d_x f_{i_{\sigma(1)}}(u_1) \dots d_x f_{i_{\sigma(k)}}(u_k) \\ &= d_x f_{i_1} \wedge \dots \wedge d_x f_{i_k}(u_1, \dots, u_k) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (f^*\alpha)_x(u_1, \dots, u_k) &= \alpha_{f(x)}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_k)) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k}(f(x)) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_k)) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k}(f(x)) d_x f_{i_1} \wedge \dots \wedge d_x f_{i_k}(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

□

C'est en fait très simple à utiliser, par exemple pour $U = V = \mathbf{R}^2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos(x_2), x_1 \sin(x_2))$

$$\begin{aligned} f^*(dy_1 \wedge dy_2) &= df_1 \wedge df_2 \\ &= d(x_1 \cos(x_2)) \wedge d(x_1 \sin(x_2)) \\ &= (\cos(x_2)dx_1 - x_1 \sin(x_2)dx_2) \wedge (\sin(x_2)dx_1 + x_1 \cos(x_2)dx_2) \\ &= x_1 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Exercice 4.5.0.3. Si $n = m = k$, on a

$$f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = \det(Df)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Proposition 4.5.0.4 (PROPRIÉTÉS DE L'IMAGE RÉCIPROQUE). Soit $f: U \rightarrow V$ lisse.

(i) Pour $\alpha, \beta \in \Omega^k(V)$, on a

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$

(ii) Si $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^\ell(V)$, on a

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

(iii) Si $g: V \rightarrow W$ est lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$, on a

$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Démonstration. (i) Évident.

(ii) Considérer $\alpha = a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ et $\beta = b dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$.

(iii) On a

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^*)_x(u_1, \dots, u_k) &= a_{g(f(x))}(d_x(g \circ f)(u_1), \dots, d_x(g \circ f)(u_k)) \\ &= a_{g(f(x))}(d_{f(x)}g(d_x f(u_1)), \dots, d_{f(x)}g(d_x f(u_k))) \\ &= (g^*\alpha)_{f(x)}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_k)) \\ &= (f^*(g^*\alpha))_x(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.5.0.5 (LA DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE ET L'IMAGE RÉCIPROQUE COMMUTENT). La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est-à-dire que si U et V sont des ouverts d'espace vectoriels et $f: U \rightarrow V$ est lisse, alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$, on a

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha).$$

Démonstration. Si $\alpha \in \Omega^0(V)$, la réciproque est simplement $f^*\alpha = \alpha \circ f$ et la formule

$$d(f^*\alpha) = d(\alpha \circ f) = d\alpha(f) \circ df = f^*d\alpha$$

la dérivée d'une fonction composée. Par linéarité, il suffit de considérer ensuite $\alpha = a \, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$. On a vu que $f^*\alpha = a \circ f \, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$ donc

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d(a \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\ &= f^*(da) \wedge f^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\ &= f^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\ &= f^*(d\alpha) \end{aligned}$$

en utilisant (ii) de la proposition 4.5.0.4 à la troisième ligne. $\square$

Il s'ensuit que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est fermée (resp. exacte).

Corollaire 4.5.0.6. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^n$ difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(V)$. Si α est fermée sur V , alors elle est exacte.

Démonstration. Soit $f: \mathbf{R}^n \rightarrow V$ un difféomorphisme. $f^*\alpha$ est alors fermée sur $\mathbf{R}^n$, donc exacte par le lemme de Poincaré. Soit $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbf{R}^n)$ tel que $d\beta = f^*\alpha$. En utilisant alors 4.5.0.5 et 4.5.0.4(iii),

$$d(f^{-1*}\beta) = f^{-1*}(d\beta) = f^{-1*}(f^*\alpha) = \alpha.$$

$\square$

Un ouvert sur lequel existe une forme différentielle fermée non exacte n'est donc pas difféomorphe à $\mathbf{R}^n$. C'est le cas de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ avec $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ (voir section suivante), d'où

Corollaire 4.5.0.7. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbf{R}^2$.

4.6 1-formes et intégrales

Définition 4.6.0.1 (INTÉGRALE D'UNE 1-FORME). Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ continue et $a = t_1 < \cdots < t_k = b$ tels que la restriction de γ à chaque $]t_i, t_{i+1}[$ soit C^1 . On définit l'intégrale de α le long de γ comme

$$\int_{\gamma} \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_i^* \alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt$$

où γ_i est la restriction de γ à $]t_i, t_{i+1}[$.

Le résultat ne change pas si on effectue un changement de paramétrage *croissant* $\mathcal{C}^1$ de γ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt = \int_{\phi^{-1}(t_i)}^{\phi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{\gamma \circ \phi(t)}(\gamma'(\phi(t))) \phi'(t) \, dt$$

par la formule du changement de variable. Le résultat est multiplié par -1 si ϕ est décroissante. Par exemple, si on note γ^{-1} le chemin $t \mapsto \gamma(b + a - t)$, défini sur $[a, b]$, on a $\int_{\gamma^{-1}} \alpha = -\int_{\gamma} \alpha$.

Si α est exacte, c'est-à-dire $\alpha = df$ pour $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ lisse, on a simplement

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b df = \int_a^b d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) \, dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Le résultat ne dépend que des extrémités de γ , en particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ est un lacet), alors

$$\int_{\gamma} df = 0.$$

Si α est exacte sur U , son intégrale sur tout lacet de U est donc nulle. Testons $\alpha = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ sur $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ avec le lacet $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. On a

$$\alpha_{\gamma(t)}(\gamma') = \frac{\cos(t)dy - \sin(t)dx}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}(-\sin(t), \cos(t)) = (\cos(t))(\cos(t)) - (\sin(t))(-\sin(t)) = 1$$

donc

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_0^{2\pi} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

α n'est donc pas exacte, ce qui prouve le corollaire 4.5.0.7. En fait le test ci-dessus est une équivalence :

Proposition 4.6.0.2. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connexe par arc et $\alpha \in \Omega^1(U)$. α est alors exacte si et seulement si $\int_{\gamma} \alpha = 0$ pour tout lacet $\gamma \subset U$ lisse par morceaux.

Démonstration. Fixons $x_0 \in U$. Pour tout $x \in U$, il existe un chemin C^1 par morceaux γ dans U qui joint x_0 à x . On pose

$$f(x) = \int_{\gamma} \alpha.$$

Le fait que l'intégrale de α sur tout lacet soit nulle implique que $f(x)$ ne dépend pas de γ (exercice). Vérifions que $df = \alpha$. Il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha(e_i)$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. Fixons i et notons c_t le chemin $s \mapsto x + se_i$ pour $s \in [0, t]$ (défini pour $t > 0$ assez petit, U est ouvert). Notons $\gamma \cup c_t$ le chemin C^1 par morceaux obtenu en mettant bout à bout γ puis c_t . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma \cup c_t} \alpha - \int_{\gamma} \alpha \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{c_t} \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_{x+se_i}(e_i) ds \\ &= \alpha_x(e_i). \end{aligned}$$

□

Définition 4.6.0.3 (LACETS HOMOTOPES). Deux lacets C^1 par morceaux $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ sont (librement) *homotopes* dans U s'il existe $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ continue telle que pour tout $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$:

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(a, s) = H(b, s)$$

et que les lacets γ_s définis par $\gamma_s(t) := H(t, s)$ sont aussi C^1 par morceaux.

Proposition 4.6.0.4 (INVARIANCE DE $\int_{\gamma} \alpha$ PAR HOMOTOPIE). Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et α une 1-forme fermée sur U . Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans U , alors

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

Démonstration. Soit $s \in [0, 1]$. Par compacité, on peut recouvrir $\gamma_s([a, b])$ par un nombre fini de boules $B_1, \dots, B_k$ contenues dans U . Sur chaque B_i , il existe $f_i: B_i \rightarrow \mathbf{R}$ lisse tel que $\alpha = df_i$, d'après le lemme de Poincaré. Sur $B_i \cap B_{i+1}$, on a $d(f_{i+1} - f_i) = 0$, donc il existe une constante $c_i \in \mathbf{R}$ telle que $f_{i+1} - f_i = c_i$ sur $B_i \cap B_{i+1}$ (pour $i = 1, \dots, k$, avec la convention $B_{k+1} = B_1, f_{k+1} = f_1$). Choisissons des points $x_1, \dots, x_k$ le long de γ_s tels que $x_{i+1} \in B_i \cap B_{i+1}$ (avec la convention $x_{k+1} = x_1$), et notons (x_i, x_{i+1}) le sous-arc de γ_s entre x_i et x_{i+1} . Puisque α restreinte à B_i est exacte, l'intégrale de α sur (x_i, x_{i+1}) ne dépend que des valeurs de f_i aux extrémités, i.e. $\int_{(x_i, x_{i+1})} \alpha = f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_s} \alpha &= \sum_{i=1}^k \int_{(x_i, x_{i+1})} \alpha = \sum_{i=1}^k (f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k f_i(x_{i+1}) - \sum_{i=1}^k f_i(x_i) = \sum_{i=1}^k f_i(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{k-1} f_{i+1}(x_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (f_i - f_{i+1})(x_{i+1}) + f_k(x_1) - f_1(x_1) \\ &= - \sum_{i=1}^k c_i. \end{aligned}$$

qui ne dépend plus des x_i . Pour s' suffisamment proche de s , on peut recouvrir $\gamma_{s'}([a, b])$ par les mêmes B_i et utiliser les mêmes f_i et c_i . Le calcul de $\int_{\gamma_{s'}} \alpha$ en utilisant les x'_i les appropriés donne donc la même valeur $-\sum_{i=1}^k c_i$. L'application $s \mapsto \int_{\gamma_s} \alpha$ est donc localement constante et donc constante car $[0, 1]$ est connexe. $\square$

Corollaire 4.6.0.5. Si U est simplement connexe (tout lacet de U est homotope à un lacet constant), alors toute 1-forme fermée sur U est exacte.

Corollaire 4.6.0.6. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe. Si $p \neq q$, le cercle parcouru p fois n'est pas homotope dans U au cercle parcouru q fois.

En effet, l'intégrale de $\alpha = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ sur le cercle parcouru p fois donne $2\pi p$. On peut montrer par contre que pour $n \geq 3$, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ est simplement connexe (et pas difféomorphe à $\mathbf{R}^n$).

Définition 4.6.0.7 (HOMOTOPIE DE CHEMINS À EXTRÉMITÉS FIXES). Deux chemins C^1 par morceaux $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$, tels que $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, sont homotopes dans U s'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ continue telle que pour tout $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$:

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(a, s) = \gamma_0(a), \quad H(b, s) = \gamma_0(b)$$

et que les chemins γ_s définis par $\gamma_s(t) := H(t, s)$ sont aussi C^1 par morceaux.

Corollaire 4.6.0.8. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et α une 1-forme fermée sur U . Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes (à extrémités fixées) dans U , alors

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

En effet, le lacet $\gamma_0 \cup \gamma_1^{-1}$ est homotope à un lacet constant.